

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**TRIGONOMETRIA:  
ENCANTOS E RECANTOS DE UMA ABORDAGEM DIDÁTICA**

Inês da Silva Pinto Campos

**MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES**

Dissertação orientada por:  
Professora Doutora Ana Rute Domingos

2017

## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, pela disponibilidade e apoio, pela exigência e orientação, pelas críticas, pela sua sabedoria e ensinamentos e, em especial, pelo incentivo e confiança. As suas observações e comentários, fruto de uma leitura muito cuidada dos tópicos teóricos, permitiram melhorar a qualidade do texto.

Aos professores e aos colegas do ano curricular, por tudo o que aprendi de essencial para a realização deste trabalho.

Aos meus alunos que têm sido o melhor da profissão de professor, é por eles que vale a pena refletir e melhorar as práticas.

Aos meus pais e irmão, pelos ensinamentos e por todo o acompanhamento ao longo desta etapa.

À Sandra e à Rita, pelo apoio incondicional, pela confiança, pelo carinho, por compreenderem os momentos de indisponibilidade e as ausências, por tudo.

## RESUMO

Enquanto professora de Matemática do ensino básico e secundário, uma das minhas principais preocupações é estimular a compreensão da Matemática, visando contribuir para o sucesso escolar dos alunos e para o seu gosto pela disciplina. Pelo que a necessidade de promover situações que desenvolvam nos alunos a capacidade de raciocinar matematicamente e que promovam a aquisição de novas estratégias e formas de pensar surge como central e fundamental no meu trabalho.

Considerando que, para responder adequadamente aos diversos desafios levantados no decorrer da prática docente, o professor de Matemática deve possuir uma compreensão ampla do conteúdo matemático, urge a necessidade de aprofundar os meus conhecimentos básicos, as conectividades, as representações múltiplas e a coerência longitudinal dos temas a lecionar, de modo a compreender, orientar e desenvolver o raciocínio dos alunos.

Atendendo aos atuais currículos da matemática pré universitária, e ao papel preponderante que a Trigonometria assume quer ao nível da geometria no plano e no espaço quer ao nível dos números complexos, apresentamos uma sequência de aprendizagem desta temática, explorando, nalguns casos, alternativas. Ao longo do trabalho revelamos passo a passo, de forma harmoniosa e sequencial a natureza dos objetos trigonométricos e as respetivas propriedades e relações. Os conceitos e resultados são apresentados de forma encadeada de modo que as novas definições e propriedades recorram aos anteriores.

Como complemento à sequência de aprendizagem seleccionámos alguns tópicos, que desafiam a descobrir e apreciar os encantos e recantos da Trigonometria. Apresentamos desafios intrigantes, estratégias surpreendentes, propriedades curiosas e alguns padrões inesperados. Serão descritas algumas relações notáveis que despertaram surpresa e curiosidade. Os recantos e encantos ultrapassam, nalguns pontos, o âmbito do programa pré universitário e procuram facultar uma informação alargada sobre os temas em estudo.

**Palavras Chave** Trigonometria, Triângulo, Identidades trigonométricas,  
Equações trigonométricas, Funções trigonométricas

## ABSTRACT

As a middle and high school Math teacher, one of my main concerns is to stimulate the understanding of Mathematics, with the purpose of contributing to the academic success of my students and their taste for the subject. Therefore the need to promote situations which develop the students' skill to think mathematically and encourage the acquisition of new strategies and ways of thinking appears as dominant and fundamental in my work.

Considering that to answer correctly to several challenges raised by my teaching practice, the Math teacher should have a broad understanding of the mathematical contents, there is an urgent need to deepen my basic knowledge, the connectivities, the multiple representations and the longitudinal coherence of the teaching topics, in order to understand, guide and develop the students' reasoning.

Taking into consideration the current pre-university math curricula and the preponderant role that Trigonometry takes whether it is geometry in the plane and space or regarding complex numbers, we present a sequence of learning on this topic, exploring, in some cases, alternatives. Throughout this work we will reveal step by step, in a harmonious and sequential manner the nature of trigonometric objects and the correspondent properties and relations. The concepts and the results are presented in a sequenced way so the new definitions and properties resort to the previous.

As a complement to the learning sequence we selected some topics which are a challenge to discover and appreciate the nooks and crannies of Trigonometry. We present intriguing challenges, surprising strategies, curious properties and some unexpected patterns. We will describe some remarkable relations which arouse surprise and curiosity. The nooks and crannies overcome, in some points, the scope of pre-university curriculum and they try to provide extended information on the studied topics.

**Key words**

Trigonometry, Triangle, Trigonometric Identities,  
Trigonometric Equations, Trigonometric Functions

## ÍNDICE

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>CAPÍTULO 1</b> Trigonometria do triângulo .....	3
1.1 Razões trigonométricas de ângulos agudos .....	3
1.2 Relações entre razões trigonométricas .....	5
1.3 Valores das razões trigonométricas .....	6
1.4 Lei dos senos e lei dos cossenos .....	8
<b>Encanto 1</b> À boleia de Carnot .....	11
1.5 Área de um triângulo .....	14
<b>CAPÍTULO 2</b> Círculo trigonométrico .....	17
2.1 Generalização da noção de arco e de ângulo.....	17
2.2 Generalização das razões trigonométricas .....	18
2.3 Generalização das identidades trigonométricas .....	21
2.4 Radiano .....	22
<b>CAPÍTULO 3</b> Identidades trigonométricas .....	24
3.1 Fórmulas da soma e da diferença .....	24
<b>Encanto 2</b> De mãos dadas com a geometria .....	27
3.2 Fórmulas do dobro do ângulo .....	30
3.3 Fórmulas da metade do ângulo .....	31
<b>Encanto 3</b> Um encontro inesperado .....	34
3.4 Fórmulas de transformação logarítmica .....	35
3.5 Fórmulas de ângulos múltiplos .....	37
<b>Encanto 4</b> À descoberta das raízes .....	40
<b>Encanto 5</b> Casamento perfeito .....	41
<b>CAPÍTULO 4</b> Funções trigonométricas .....	43
4.1 Funções trigonométricas .....	43
4.1.1 Função seno .....	44
4.1.2 Função cosseno .....	45
4.1.3 Função tangente .....	46
<b>Encanto 6</b> Um olhar telescópico .....	46
4.2 Transformações de funções trigonométricas .....	48
4.3 Soma de funções sinusoidais .....	52
4.4 Funções trigonométricas inversas .....	55
4.4.1 Função arco-seno .....	55
4.4.2 Função arco-cosseno .....	56
4.4.3 Função arco-tangente .....	57

<b>CAPÍTULO 5</b>	Equações trigonométricas .....	59
5.1	Equações elementares .....	59
5.2	Equações e identidades trigonométricas .....	61
5.3	Equações de 2º grau .....	63
5.4	Equação linear em $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$ .....	63
<b>CAPÍTULO 6</b>	Derivadas das funções trigonométricas .....	66
6.1	Estudo do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ .....	66
	<b>Encanto 7</b> Fascínio pelo infinito.....	67
6.2	Derivadas de funções trigonométricas .....	69
<b>CAPÍTULO 7</b>	Trigonometria – Algumas aplicações .....	71
7.1	Oscilador harmónico .....	71
	7.1.1 Sistema massa-mola .....	72
7.2	Soma de osciladores harmónicos .....	74
	<b>Encanto 8</b> Curvas Famosas .....	78
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	.....	81
<b>ANEXOS</b>		
<b>I</b>	Tópicos complementares (Cap.1 ) .....	82
<b>II</b>	Tópicos complementares (Cap.3 ) .....	88
<b>III</b>	Tópicos complementares (Cap.4 ) .....	95
<b>IV</b>	Tópicos complementares (Cap. 4 e 6 ) .....	98
<b>V</b>	Tópicos complementares (Cap.7 ) .....	101
<b>VI</b>	Estórias que a história nos conta .....	104

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Triângulo retângulo .....	3
Figura 1.2 – Triângulo retângulo .....	3
Figura 1.3 – Triângulo retângulo em C .....	3
Figura 1.4 – Triângulos retângulos com um ângulo interno comum .....	4
Figura 1.5 – Triângulo retângulo [ABC] .....	5
Figura 1.6 – Triângulo retângulo de ângulos internos $\alpha$ e $\beta$ .....	6
Figura 1.7 – Quadrado de lado 1 .....	7
Figura 1.8 – Triângulo equilátero de lado 2 .....	7
Figura 1.9 – Triângulo acutângulo [ABC] .....	8
Figura 1.10 – Decomposição de um triângulo pela altura .....	8
Figura 1.11 – Triângulo retângulo .....	9
Figura 1.12 – Triângulo obtusângulo .....	9
Figura 1.13 – Triângulo acutângulo .....	10
Figura 1.14 – Triângulo retângulo .....	10
Figura 1.15 – Triângulo obtusângulo .....	10
Figura 1.16 – Sequência de triângulos retângulos (aumento da amplitude do ângulo BAC).....	11
Figura 1.17 – Sequência de triângulos retângulos (diminuição da amplitude do ângulo BAC).....	11
Figura 1.18 – Paralelogramo .....	12
Figura 1.19 – Triângulo .....	12
Figura 1.20 – Duplicação de um triângulo.....	12
Figura 1.21 – Triângulo [ABC] .....	13
Figura 1.22 – Quadrilátero [ABCD].....	13
Figura 1.23 – Triângulo inscrito numa circunferência .....	14
Figura 1.24 – Triângulo acutângulo .....	14
Figura 1.25 – Triângulo retângulo .....	15
Figura 1.26 – Triângulo obtusângulo .....	15
Figura 1.27 – Triângulo [ABC] .....	15
Figura 1.28 – Triângulo [ABC] .....	16
Figura 2.1 – Rotação de uma semirreta .....	17
Figura 2.2 – Ângulos orientados .....	17
Figura 2.3 – Referencial o.n .....	18
Figura 2.4 – Circunferência trigonométrica .....	18
Figura 2.5 – Seno e cosseno de um ângulo $\alpha$ .....	19
Figura 2.6 – Reta das tangentes.....	20
Figura 2.7 – Ângulos suplementares .....	21
Figura 2.8 – Ângulos de extremidades simétricas em relação à origem .....	21
Figura 2.9 – Ângulos de extremidades simétricas em relação a Ox .....	22
Figura 2.10 – Ângulos complementares .....	22
Figura 2.11 – Ângulos $\alpha$ e $90^\circ + \alpha$ .....	22
Figura 2.12 – Circunferência de centro O e raio r.....	22
Figura 2.13 – Conceito de radiano .....	23

Figura 3.1 – Ângulos inscritos numa circunferência .....	24
Figura 3.2 – Composição de dois triângulos retângulos .....	25
Figura 3.3 – Demonstração geométrica.....	26
Figura 3.4 – Paralelogramo inscrito numa circunferência.....	27
Figura 3.5 – Quadrilátero cíclico .....	28
Figura 3.6 – Retângulo inscrito numa circunferência .....	28
Figura 3.7 – Quadrilátero cíclico inscrito numa circunferência .....	28
Figura 3.8 – Circunferência .....	29
Figura 3.9 – Quadrilátero cíclico .....	29
Figura 3.10 – Circunferência de raio 1 .....	32
Figura 3.11 – Plimpton 322 .....	34
Figura 4.1 – Funções periódicas .....	43
Figura 4.2 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{sen } x$ .....	44
Figura 4.3 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{cos } x$ .....	45
Figura 4.4 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{tg } x$ .....	46
Figura 4.5 – Gráfico de $\text{sen } x$ em $[0, \pi]$ .....	47
Figura 4.6 – Gráfico de $\text{sen } x$ delimitado por um retângulo e um triângulo.....	47
Figura 4.7 – Aproximações (por defeito e por excesso) da área S .....	47
Figura 4.8 – Aproximação de S.....	48
Figura 4.9 – Representação gráfica das funções $f, g_1$ e $g_2$ .....	49
Figura 4.10 – Representação gráfica das funções $f, g_1$ e $g_2$ .....	49
Figura 4.11 – Representação gráfica das funções $f, g_1$ e $g_2$ .....	51
Figura 4.12 – Representação gráfica das funções $f, g_1$ e $g_2$ .....	51
Figura 4.13 – Representação gráfica das funções $f + g$ e $f + h$ .....	54
Figura 4.14 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{sen } x$ em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .....	55
Figura 4.15 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{sen } x$ em $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .....	55
Figura 4.16 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{arcsen } x$ .....	56
Figura 4.17 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{cos } x$ em $[-2\pi, -\pi]$ .....	56
Figura 4.18 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{cos } x$ em $[0, \pi]$ .....	56
Figura 4.19 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{arccos } x$ .....	57
Figura 4.20 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{tg } x$ em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .....	57
Figura 4.21 – Representação gráfica da função $f(x) = \text{arctg } x$ .....	58
Figura 6.1 – Representação gráfica de $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ .....	66
Figura 6.2 – Círculo trigonométrico .....	67
Figura 7.1 – Representação de um sistema massa-mola .....	72
Figura 7.2 – Representação gráfica das funções $f_1, f_2$ e $f$ .....	74
Figura 7.3 – Representação gráfica das funções $f_1, f_2$ e $f_3$ .....	75
Figura 7.4 – Representação gráfica das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	75
Figura 7.5 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	75
Figura 7.6 – Representação gráfica da função quadrada .....	75
Figura 7.7 – Representação gráfica das funções $f_1, f_2$ e $f_3$ .....	76
Figura 7.8 – Representação gráfica das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	76
Figura 7.9 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	76
Figura 7.10 – Representação gráfica da função $y = x$ .....	76
Figura 7.11 – Representação gráfica das funções $f_1, f_2$ e $f_3$ .....	77

Figura 7.12 – Representação gráfica das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	77
Figura 7.13 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções $g_1, g_2$ e $g_3$ .....	77
Figura 7.14 – Exemplos de curvas de Lissajous .....	78
Figura 7.15 – Representação gráfica do oscilador e da respetiva curva de Lissajous .....	79
Figura 7.16 – Representação gráfica dos osciladores e da respetiva curva de Lissajous .....	79
Figura 7.17 – Representação gráfica dos osciladores e da respetiva curva de Lissajous .....	79
Figura 7.18 – Representação gráfica dos osciladores $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ e da respetiva curva de Lissajous .....	80
Figura 7.19 – Representação gráfica dos osciladores $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \text{sen}\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$ e da respetiva curva de Lissajous .....	80

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 – Razões trigonométricas de ângulos de amplitude $30^\circ, 45^\circ$ e $60^\circ$ .....	7
Tabela 2.1 – Variação do seno e do cosseno em função dos quadrantes .....	19
Tabela 2.2 – Sinal do seno e do cosseno em função dos quadrantes .....	19
Tabela 2.3 – Variação da tangente em função dos quadrantes .....	20
Tabela 2.4 – Sinal da tangente em função dos quadrantes .....	20
Tabela 3.1 – Relação entre $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta$ e $\text{sen}(\alpha + \beta)$ .....	24
Tabela 3.2 – Relação dos comprimentos dos lados e das diagonais de um QC.....	28
Tabela 3.3 – Ternos pitagóricos .....	35
Tabela 3.4 – Identidades trigonométricas $tg(n\alpha)$ e Triângulo de Pascal .....	42

## INTRODUÇÃO

Atendendo aos atuais currículos da matemática pré universitária, e ao papel preponderante que a trigonometria assume quer ao nível da *geometria no plano e no espaço* quer ao nível dos *números complexos*, apresentamos uma sequência de aprendizagem da temática da trigonometria, desde o triângulo retângulo, passando pelo círculo trigonométrico, até às funções trigonométricas, revelando passo a passo, de forma harmoniosa e sequencial a natureza dos objetos trigonométricos e as respetivas propriedades e relações. Os tópicos abordados foram pensados numa lógica de construção de conhecimento assente noutros previamente conhecidos e a ordem de apresentação traduz uma possível sequência para o estudo dos temas.

Ao longo do trabalho apresentamos alguns resultados surpreendentes, abordagens alternativas, estratégias singulares, conexões inesperadas, desafios inquietantes e curiosos episódios históricos, tópicos esses designados por *recantos* e *encantos*. Os *recantos* complementam o programa pré universitário e integram a exposição dos diversos tópicos. Com os *encantos* abrem-se pequenos parêntesis para oferecer temas para reflexão e perspetivas ligeiramente diferentes das usuais no estudo da trigonometria. Ambos ultrapassam em alguns pontos o âmbito do atual currículo e procuram facultar uma informação alargada sobre os temas em estudo.

O trabalho encontra-se dividido em sete capítulos. Cada capítulo encontra-se construído de forma gradual, partindo, sempre que possível, do apelo à intuição e à experimentação para uma progressiva formalização dos conhecimentos. Sem descurar o nível de rigor, procurou-se não perder de vista a intuição geométrica por detrás dos vários conceitos e resultados. Ao longo do texto, para um melhor enquadramento a nível histórico e cultural, surgem notas de rodapé, umas de natureza biográfica, outras de natureza histórica.

O trabalho encontra-se estruturado de acordo com os seguintes capítulos:

**No capítulo 1** estabelecemos relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, começando pelo triângulo retângulo e estendendo, posteriormente, a um qualquer triângulo arbitrário. Introduzimos as chamadas Lei dos senos e Lei dos cossenos e as respetivas demonstrações. Tendo por base as duas leis surge o primeiro encanto *À boleia de Carnot* onde apresentamos uma sequência de teoremas que revela novas propriedades dos triângulos e dos quadriláteros.

Nesta secção apresentamos, ainda, o conceito seno de um ângulo segundo diferentes perspetivas (dependendo das condições iniciais apresentadas), estabelecendo conexões entre elas e identificando e compreendendo as suas potencialidades e as suas limitações. Por último, introduzimos a surpreendente Fórmula de Heron que permite calcular a área do triângulo a partir da medida do comprimento dos seus lados.

A generalização das noções de ângulo e de arco conduzem-nos, naturalmente, à extensão da definição das razões trigonométricas. **No capítulo 2** apresentamos definições alternativas para as razões trigonométricas e generalizamos as relações trigonométricas para qualquer ângulo. Introduzimos, ainda, um novo sistema de amplitude de ângulos designado por sistema circular.

Das definições das razões trigonométricas de um mesmo ângulo estudadas no primeiro capítulo, resultam algumas relações entre elas. **No capítulo 3** apresentamos algumas identidades relativas à soma e à diferença de dois ângulos, à duplicação e bisseção de um ângulo, a ângulos múltiplos, entre outras.

Das primeiras identidades resulta o segundo encanto *De mãos dadas com a geometria* onde apresentamos uma demonstração da equivalência entre a Identidade de Ptolomeu e a fórmula da soma do seno de dois ângulos.

O terceiro encanto *Encontro inesperado* surge na sequência do estudo das identidades relativas à bisseção de um ângulo. Neste tópico mostramos como determinar um terno pitagórico

recorrendo às funções trigonométricas, ou seja, mostramos como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras, recorrendo à representação das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente em função de uma mesma variável, a função tangente da metade de um ângulo.

Na sequência do estudo das identidades relativas a ângulos múltiplos surgem mais dois encantos. No quarto encanto *À procura das raízes* mostramos como com a sua perspicácia em aliar a trigonometria à álgebra, Viète, recorre a identidades trigonométricas para resolver uma equação de grau 45 e no quinto encanto *Casamento Perfeito* revelamos uma relação surpreendente entre expressões envolvendo identidades trigonométricas e o Triângulo de Pascal.

**No capítulo 4** apresentamos as funções trigonométricas que pela sua periodicidade constituem ferramentas essenciais na construção de modelos que correspondem a fenómenos periódicos, bem como as respetivas funções trigonométricas inversas. Analisamos, ainda, algumas das propriedades das funções trigonométricas, nomeadamente, a relação entre as propriedades geométricas dos gráficos das funções seno e cosseno com, respetivamente, a família de funções  $y = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$  e  $y = a \operatorname{cos}(bx + c) + d$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$  e apresentamos alguns resultados importantes sobre a combinação linear de funções seno e cosseno.

Tendo por base as identidades trigonométricas estudadas no capítulo anterior, surge o sexto encanto *Um olhar telescópico* onde determinamos a área compreendida entre a curva da função seno e o eixo  $Ox$ .

Ao resolver problemas que envolvem funções trigonométricas somos, muitas vezes, levados a resolver equações trigonométricas. **No capítulo 5**, apresentamos a sistematização da resolução de alguns destes tipos de equações. Alguns exemplos resolvidos ilustram as várias técnicas e conceitos apresentados ao longo do texto.

**No capítulo 6** deduzimos alguns limites trigonométricos, com especial destaque, para o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$  e mostramos a utilidade deste limite na determinação das derivadas das funções trigonométricas. Na sequência do estudo dos limites trigonométricos, surge o sétimo encanto *Fascínio pelo infinito* relativo a uma das constantes mais estudadas e fascinantes da matemática, o número  $\pi$ . Nesta secção apresentamos uma expressão, desenvolvida pelo francês François Viète, com base em resultados trigonométricos, que permite escrever o valor de  $\pi$  através de um produto de infinitos fatores.

**No capítulo 7** apresentamos algumas aplicações da trigonometria na modelação da realidade física, nomeadamente, a utilização de funções trigonométricas na modelação de sistemas que exibem um comportamento periódico e oscilatório. Em particular, apresentamos um caso particular de oscilador harmónico, o sistema massa-mola, e exploramos algumas propriedades relativas a osciladores harmónicos que têm especial importância na modelação de fenómenos periódicos, nomeadamente, na análise de ondas sonoras.

Neste capítulo surge o último encanto *Curvas Famosas* onde apresentamos um conjunto de curvas notáveis, designadas, habitualmente, por Curvas de Lissajous, que para além de um visual fascinante, tem inúmeras aplicações na Física, nomeadamente, no estudo de fenómenos oscilatórios.

Não sendo possível abordar todos os tópicos que suscitaram interesse, apresentamos em **anexo** alguns *Tópicos complementares*, nomeadamente, estratégias, demonstrações e resultados que complementam os temas abordados (cf. *Anexo I a V*) e algumas *Estórias que a história nos conta* que pretendem ser uma viagem à forma como a Matemática, em particular, a trigonometria, foi sendo construída e descoberta (cf. *Anexo VI*). Nesta última rubrica procuramos enquadrar do ponto de vista histórico alguns dos conceitos estudados, desde o modo simples e engenhoso como Eratóstenes efetuou a estimativa do diâmetro da Terra, passando por um belíssimo resultado geométrico utilizado por Ptolomeu para dele deduzir resultados auxiliares para a construção de uma tabela de cordas, entre outros.

## CAPÍTULO 1 TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO

Neste capítulo vamos estabelecer relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, começando pelo triângulo retângulo e estendendo, posteriormente, a um qualquer triângulo arbitrário.

### 1.1. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS AGUDOS

O estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, designados por **elementos principais**, constitui o objeto da trigonometria e, em conjunto com a semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras<sup>1</sup> e o Teorema de Tales<sup>2</sup>, reveste-se de grande importância pelas suas aplicações na resolução de problemas.

Começamos por apresentar alguns conceitos e resultados importantes relativos a triângulos retângulos.

Ao longo do capítulo, consideramos fixada a unidade de comprimento, a unidade de amplitude de ângulos, o grau, e um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $A$ , de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e de ângulo interno  $\alpha = \widehat{ACB}$  (cf. *Figura 1.1*).

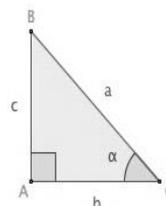


Figura 1.1 - Triângulo Retângulo

**TEOREMA DE PITÁGORAS.** Considere-se um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $A$  e os lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Então  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**DEFINIÇÃO 1.1** Considere-se um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $A$ , de lados  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[AC]$  e de ângulo interno  $\alpha = \widehat{ACB}$  (cf. *Figura 1.2*) Designa-se por **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto e por **catetos** os lados a ele adjacentes. Relativamente ao ângulo agudo  $\alpha$ , designa-se por **cateto oposto** ao ângulo  $\alpha$  o segmento de reta  $[AB]$  e por **cateto adjacente** ao ângulo  $\alpha$  o segmento de reta  $[AC]$ .

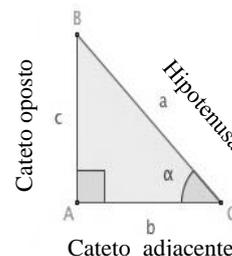


Figura 1.2 - Triângulo Retângulo

**OBSERVAÇÃO.** Por vezes, por abuso de linguagem, o comprimento do cateto é designado, simplesmente, por cateto, e o comprimento da hipotenusa por hipotenusa.

Em relação ao triângulo retângulo  $[ABC]$  podem considerar-se as seguintes razões entre as medidas dos comprimentos dos lados:  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{c}$ ,  $\frac{c}{a}$ ,  $\frac{b}{c}$ ,  $\frac{c}{b}$ . Analisamos, de seguida, algumas das suas relações.

Sabe-se que dado um ângulo agudo  $\alpha$  de vértice no ponto  $A$  e um ponto  $B$ , distinto de  $A$ , pertencente a um dos lados, é sempre possível traçar uma reta que passa por  $B$  e é perpendicular ao outro lado, obtendo-se, assim, um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $C$  (cf. *Figura 1.3*). Considere-se, agora, um ângulo agudo  $\alpha$  e os triângulos  $[ABC]$ ,  $[ADE]$ ,  $[AFG]$  e  $[AHI]$  retângulos em  $C$ ,  $E$ ,  $G$  e  $I$ , respetivamente, em que  $\alpha$  é o ângulo interno comum a todos eles (cf. *Figura 1.4*).

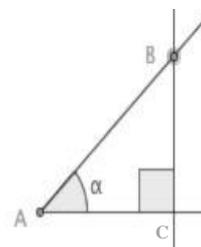


Figura 1.3 - Triângulo retângulo em C

<sup>1</sup> **Pitágoras de Samos** (580 a.C. - 500 a.C.), matemático, filósofo, astrónomo, músico e místico grego, a quem se atribui a descoberta do Teorema de Pitágoras. Desenvolveu importantes trabalhos nas áreas da filosofia, da matemática, da astronomia e da música.

<sup>2</sup> **Tales de Mileto** (646 a. C. - 546 a.C.), filósofo e matemático grego, considerado um dos “sete sábios” da antiguidade. Atribui-se-lhe a descoberta de importantes resultados geométricos, em particular, do Teorema de Tales.

Observe-se que os triângulos apresentam dois ângulos correspondentes congruentes, o ângulo reto e o ângulo  $\alpha$ , logo são semelhantes<sup>3</sup> entre si. Pelo que se conclui que os triângulos assim construídos são semelhantes a qualquer triângulo retângulo que admita um ângulo interno igual a  $\alpha$ .

Pelo Teorema de Tales<sup>4</sup>, é possível afirmar que as razões entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais, logo

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AH}}.$$

De modo análogo, estabelecem-se igualdades para as razões entre as medidas dos comprimentos dos restantes lados correspondentes. Observe-se que as razões entre as medidas dos comprimentos de lados correspondentes dependem apenas da amplitude do ângulo  $\alpha$  e não do triângulo retângulo considerado. O que significa, por exemplo, que quaisquer dois triângulos retângulos com um ângulo interno de amplitude  $60^\circ$  são semelhantes. De sublinhar, ainda, que atendendo à existência de uma razão de proporcionalidade entre medidas de comprimentos, as razões são independentes das unidades de medida consideradas.

Com o objetivo de distinguir as razões anteriores atribui-se uma designação a cada uma delas, que apresentamos, de seguida.

**DEFINIÇÃO 1.2** Designa-se por **seno de  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por **sen  $\alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e da hipotenusa, ou seja,

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{comprimento do lado oposto ao ângulo}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$

**DEFINIÇÃO 1.3** Designa-se por **coseno de  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por **cos  $\alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  e da hipotenusa, ou seja,  $\text{cos } \alpha = \frac{\text{comprimento do lado adjacente ao ângulo}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ .

**DEFINIÇÃO 1.4** Designa-se por **tangente de  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por **tg  $\alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{comprimento do lado oposto ao ângulo}}{\text{comprimento do lado adjacente ao ângulo}} = \frac{c}{b}$ .

**DEFINIÇÃO 1.5** Designa-se por **secante de  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por **sec  $\alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos da hipotenusa e do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\text{sec } \alpha = \frac{\text{comprimento da hipotenusa}}{\text{comprimento do lado adjacente ao ângulo}} = \frac{a}{b}$ .

**DEFINIÇÃO 1.6** Designa-se por **cossecante  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por **cossec  $\alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos da hipotenusa e do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\text{cossec } \alpha = \frac{\text{comprimento da hipotenusa}}{\text{comprimento do lado oposto ao ângulo}} = \frac{a}{c}$ .

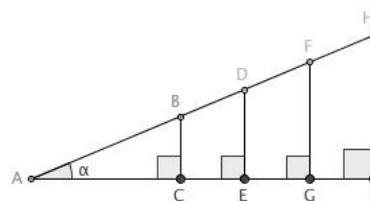


Figura 1.4 - Triângulos retângulos com um ângulo interno comum

<sup>3</sup> Dois triângulos são **semelhantes** se e só se, de um para o outro, têm dois ângulos com a mesma amplitude.

<sup>4</sup> **Teorema de Tales** “Se um feixe de retas paralelas é intersectado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais”.

**DEFINIÇÃO 1.7** Designa-se por **cotangente de  $\alpha$** , e representa-se abreviadamente por  **$\cotg \alpha$** , o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto adjacente e do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\cotg \alpha = \frac{\text{comprimento do lado adjacente ao ângulo}}{\text{comprimento do lado oposto ao ângulo}} = \frac{b}{c}$ .

Os seis quocientes entre medidas de comprimento de lados de um triângulo retângulo, definidos anteriormente, designam-se por **razões trigonométricas**<sup>5</sup>.

**OBSERVAÇÃO.** Num triângulo retângulo, o lado maior é a hipotenusa, pelo que atendendo às definições de seno e de cosseno de um ângulo agudo,  $\alpha$ , se pode concluir que  $0 < \text{sen } \alpha < 1$  e  $0 < \text{cos } \alpha < 1$ .

## 1.2. RELAÇÕES ENTRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Das definições das razões trigonométricas de um mesmo ângulo resultam algumas relações entre elas que apresentamos no próximo teorema.

**TEOREMA 1.1** Dado um triângulo  $[ABC]$  retângulo em A, com um ângulo interno  $\alpha = \widehat{ACB}$ , de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  (cf. *Figura 1.5*), fixada uma unidade de comprimento, tem-se

[A]  $tg \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ .

[B]  $\cotg \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$ .

[C]  $\sec \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ .

[D]  $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ .

[E]  $(\text{cos } \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2 = 1$ , designada por **Fórmula Fundamental da Trigonometria**.

[F]  $1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}$ .

[G]  $\cotg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$ .

**OBSERVAÇÃO.** Por uma questão de simplificação de escrita, pode escrever-se  $\text{sen}^2 \alpha$  no lugar de  $(\text{sen } \alpha)^2$ . O mesmo acontece para as restantes razões trigonométricas e para outro expoente natural, por exemplo,  $(\text{cos } \alpha)^3 = \text{cos}^3 \alpha$  e  $(tg \alpha)^4 = tg^4 \alpha$ . No entanto,  $\text{cosec } \alpha = (\text{sen } \alpha)^{-1} \neq \text{sen}^{-1} \alpha$ . A expressão  $\text{sen}^{-1} \alpha$  tem um significado diferente, que será abordado numa secção posterior (cf. *Secção 1.3*). Estas convenções aplicam-se às restantes razões trigonométricas.

**Demonstração.** Considere-se o triângulo  $[ABC]$  retângulo em A.

Sabe-se que  $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$  e  $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$ . Donde,

[A]  $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = tg \alpha$ .

[B]  $\frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \cotg \alpha$ .

[C]  $\frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = \sec \alpha$ .

[D]  $\frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} = \text{cosec } \alpha$ .

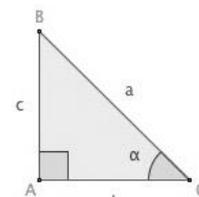


Figura 1.5 - Triângulo retângulo  $[ABC]$

<sup>5</sup> As razões trigonométricas são utilizadas desde há mais de 2000 anos na resolução de problemas ligados à astronomia e à cartografia (cf. *Anexos VI.1 a VI.3 - Estórias que a história nos conta*).

[E] Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que  $a^2 = b^2 + c^2$ . Pelo que

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

[F] Considere-se a Fórmula Fundamental da Trigonometria,  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

Dividindo ambos os membros da equação por  $\cos^2 \alpha$  e simplificando a expressão:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

[G] A demonstração é análoga à anterior. Dividindo ambos os membros da equação por  $\sin^2 \alpha$ :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad \blacksquare$$

Estas relações revelam-se de grande utilidade dado que permitem, conhecida uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo, deduzir os valores exatos das restantes razões trigonométricas.

De seguida, vamos estabelecer algumas relações entre as razões trigonométricas dos ângulos agudos internos do triângulo retângulo. Na figura está representado um triângulo [ABC] retângulo em A de ângulos internos agudos  $\alpha = \widehat{ACB}$  e  $\beta = \widehat{ABC}$  e de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  (cf. Figura 1.6).

A partir dos dados da figura, tem-se que

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{c}{a} & \cos \alpha &= \frac{b}{a} & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c}{b} & \text{e} \\ \sin \beta &= \frac{b}{a} & \cos \beta &= \frac{c}{a} & \operatorname{tg} \beta &= \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  pelo que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , donde  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares<sup>6</sup>. Comparando as razões trigonométricas de  $\alpha$  com as razões trigonométricas de  $\beta$  e atendendo a que  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , obtêm-se os resultados enunciados no teorema seguinte.

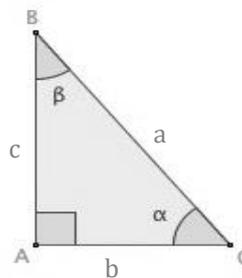


Figura 1.6 – Triângulo retângulo de ângulos internos agudos  $\alpha$  e  $\beta$

**TEOREMA 1.2** Dado um triângulo [ABC] retângulo em A, de lados [AB], [BC] e [AC] e de ângulos internos agudos  $\alpha = \widehat{ACB}$  e  $\beta = \widehat{ABC}$ , então

- [A]  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \beta$ .
- [B]  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \beta$ .
- [C]  $\sec \alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \beta$ .
- [D]  $\operatorname{cosec} \alpha = \sec(90^\circ - \alpha) = \sec \beta$ .
- [E]  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \beta$ .
- [F]  $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \beta$ .

As demonstrações das relações enunciadas em [C], [D] e [F] são muito semelhantes às do teorema anterior e demonstram-se, facilmente, recorrendo à definição de secante, de cosecante e de cotangente.

**OBSERVAÇÃO.** Em particular, observe-se que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ .

### 1.3. VALORES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Um dos processos para obter valores aproximados das razões trigonométricas de um ângulo agudo é recorrer à construção geométrica de um triângulo, usando régua e compasso. Constrói-se um triângulo retângulo tal que a amplitude de um dos ângulos internos seja a dada e procede-se às

<sup>6</sup> Dois ângulos dizem-se **complementares** quando a soma das suas amplitudes é  $90^\circ$ .

medições necessárias para o cálculo das respectivas razões trigonométricas

Alguns casos são particularmente simples recorrendo a alguns resultados geométricos, nomeadamente, os ângulos de amplitudes  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , situação ilustrada nos exemplos seguintes.

Vamos começar por determinar as razões trigonométricas de um **ângulo de amplitude  $45^\circ$** , considerando, fixada uma unidade de comprimento, um quadrado  $[ABCD]$ , cuja medida do comprimento dos lados é 1, como ilustrado na figura (cf. *Figura 1.7*).

Tem-se que  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ , pelo que o triângulo  $[ABD]$  é retângulo em A. Como  $\overline{AB} = \overline{AD}$ , então o triângulo  $[ABD]$  é isósceles, logo  $\widehat{ADB} = 45^\circ$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{2}.$$

Como  $\overline{BD} > 0$  então  $\overline{BD} = \sqrt{2}$ . Assim,

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \text{cos}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

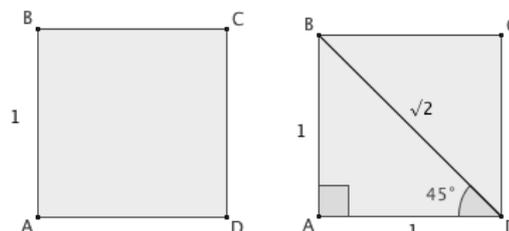


Figura 1.7 – Quadrado de lado 1

Vejamos, agora, como determinar as razões trigonométricas de um **ângulo de amplitude  $30^\circ$**  e de um **ângulo de amplitude  $60^\circ$** , considerando, fixada uma unidade de comprimento, um triângulo equilátero  $[ABC]$ , cuja medida do comprimento dos lados é 2 (cf. *Figura 1.8*).

Considere-se o triângulo equilátero  $[ABC]$ , de lados de medida  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 2$  e de ângulos internos  $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ .

Seja  $[BD]$  a altura relativa à base  $[AC]$ . Assim o triângulo  $[ADB]$  é retângulo em D e como  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  então  $\widehat{ABD} = 30^\circ$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se

$$\overline{BD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{3}.$$

Como  $\overline{BD} > 0$  então  $\overline{BD} = \sqrt{3}$ .

Assim,

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Tem-se, ainda,

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} \text{ e } \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

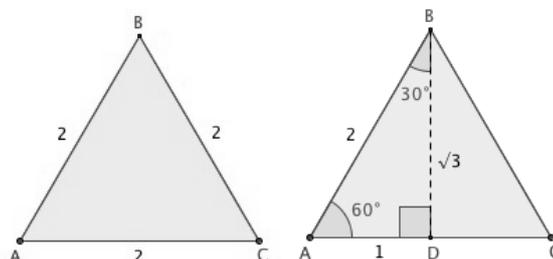


Figura 1.8 – Triângulo equilátero de lado 2

**OBSERVAÇÃO.** Nos exemplos anteriores, tomou-se 1 e 2, respetivamente, para unidades de medida do comprimento do lado dos polígonos. No entanto, dado que as razões trigonométricas de um determinado ângulo agudo dependem apenas da amplitude do ângulo considerado, sem perda de generalidade, podemos tomar para medida do comprimento do lado do quadrado e do triângulo um qualquer valor arbitrário.

A tabela seguinte resume os valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de amplitude  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

Tabela 1.1 – Razões trigonométricas dos ângulos de amplitude  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$

	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{sec } \alpha$	$\text{cosec } \alpha$	$\text{cotg } \alpha$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Existem tabelas, as chamadas **tabelas trigonométricas** (ou tabelas de valores naturais) onde se encontra o registo dos valores aproximados das razões trigonométricas de diversos ângulos (cf. *Anexo VI.1*).

Hoje em dia usam-se calculadoras (ou softwares informáticos). Para determinar um valor aproximado do seno, cosseno ou tangente de um ângulo conhecida a sua amplitude, começa-se por seleccionar a unidade de amplitude do ângulo e, de seguida, recorre-se às teclas *sen*, *cos* e *tg* da calculadora<sup>7</sup>.

Observe-se, ainda, que conhecido o valor de uma razão trigonométrica de um ângulo agudo é também possível determinar a sua amplitude através da calculadora. Para determinar um valor aproximado da amplitude de um ângulo conhecida uma das suas razões trigonométricas, recorre-se às teclas  $sen^{-1}$ ,  $cos^{-1}$  e  $tg^{-1}$  da calculadora<sup>8</sup>.

**OBSERVAÇÃO.** Quando se recorre a uma calculadora é importante assegurarmo-nos de que a calculadora se encontra na situação de utilizar a medida pretendida, dado que as calculadoras utilizam pelo menos duas unidades de medida para ângulos: o grau e o radiano (cf. *Secção 2.4*).

#### 1.4. LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

Nesta secção vamos estender alguns conceitos trigonométricos já estudados a ângulos retos e obtusos. Começamos por estabelecer um resultado em triângulos acutângulos.

**TEOREMA 1.3** Dado um triângulo acutângulo  $[ABC]$ , de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ , de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , fixada uma unidade de comprimento (cf. *Figura 1.9*), tem-se

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}.$$

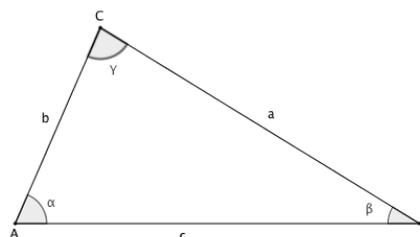


Figura 1.9 – Triângulo acutângulo

Estas igualdades designam-se por «**Lei dos senos**» ou «**Analogia dos senos**» e dizem-nos que as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo acutângulo são diretamente proporcionais aos senos dos respetivos ângulos opostos.

Apresentamos, de seguida, a demonstração da Lei dos senos.

**Demonstração.** Na figura está representado um triângulo acutângulo  $[ABC]$  correspondendo  $[CP]$  à altura do triângulo relativamente à base  $[AB]$  (cf. *Figura 1.10*).

Designemos por  $h_c$  a altura do triângulo relativamente ao lado  $[AB]$  do triângulo. Analogamente, designa-se  $h_a$  e  $h_b$  as alturas relativas aos lados  $[BC]$  e  $[AC]$ , respetivamente.

A partir do triângulo  $[ACP]$ , tem-se

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_c}{b} \text{ logo } h_c = b \text{ sen } \alpha.$$

A partir do triângulo  $[BCP]$  tem-se

$$\text{sen } \beta = \frac{h_c}{a} \text{ logo } h_c = a \text{ sen } \beta. \text{ Então}$$

$$b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta \Leftrightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}. \tag{1}$$

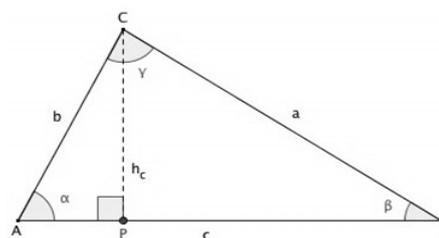


Figura 1.10 – Decomposição de um triângulo pela altura

<sup>7</sup> Por exemplo, para calcular  $\text{sen}(60^\circ)$  utilizamos a seguinte sequência de teclas: *sen - 6 - 0 - =*.

<sup>8</sup> Por exemplo, para saber o ângulo cujo seno é 0,5 utilizamos uma das seguintes sequências de teclas: *shift - sen<sup>-1</sup> - 0 - . - 5 - =* ou *2nd - sen<sup>-1</sup> - 0 - . - 5 - =* ou *INV - sen - 0 - . - 5 - =*.

Utilizando o mesmo procedimento para definir  $h_a$ , obtém-se:

$$h_a = b \operatorname{sen} \gamma = c \operatorname{sen} \beta \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}. \quad (2)$$

De (1) e (2) obtém-se  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$ . ■

Fica, assim, demonstrada a validade da Lei dos senos para triângulos acutângulos.

Mas será esta lei válida para qualquer triângulo? Ao fazermos esta pergunta há duas questões que se colocam de imediato: O que é  $\operatorname{sen}(90^\circ)$ ? E o que é o seno de um ângulo obtuso? Analisemos, os casos em que o triângulo é retângulo e, de seguida, o caso em que o triângulo é obtusângulo.

Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ , de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ .

(i) No caso do triângulo ser **retângulo** em A (cf. *Figura 1.11*), tem-se que

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} = \frac{c}{a} = \frac{1}{a}.$$

Assim, a Lei dos senos verificar-se-á se

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a}, \text{ ou seja, se o seno de } 90^\circ \text{ for } 1. \quad \blacksquare$$

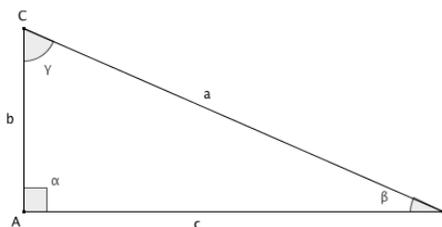


Figura 1.11 – Triângulo retângulo

(ii) No caso do triângulo ser **obtusângulo** em A (cf. *Figura 1.12*), com  $h_c$  a altura do triângulo relativa à base  $[AB]$ , tem-se que

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{h_c}{a} = \frac{h_c}{ab}.$$

Assim a Lei dos senos verificar-se-á se

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{h_c}{ab} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{h_c}{b},$$

ou seja, se  $\operatorname{sen} \alpha$  for igual ao valor de  $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$ . ■

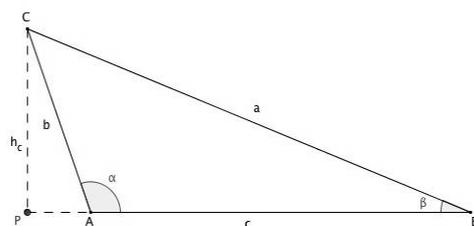


Figura 1.12 – Triângulo obtusângulo

Constata-se, assim, que a única forma possível de estender a Lei dos senos a triângulos retângulos e triângulos obtusângulos é tomando  $\operatorname{sen} \alpha = 1$  quando o ângulo  $\alpha$  é um ângulo reto, e tomando  $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\alpha')$ , quando  $\alpha$  é um ângulo obtuso e  $\alpha'$  é ângulo suplementar<sup>9</sup> de  $\alpha$ .

Apresenta-se, de seguida, uma segunda propriedade relativa a triângulos acutângulos.

**TEOREMA 1.4** Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$  cujos ângulos internos são  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ , sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  agudos, e os lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Este resultado designa-se por «**Lei dos cossenos**» ou «**Teorema de Carnot**<sup>10</sup>».

**Demonstração.** Seja  $[CD]$  a altura do triângulo  $[ABC]$  relativamente à base  $[AB]$ , com  $p = \overline{AD}$  e  $q = \overline{DB}$  (cf. *Figura 1.13*). Tem-se que  $c = p + q \Leftrightarrow q = c - p$ .

A partir do triângulo  $[ACD]$  tem-se

$$\cos \alpha = \frac{p}{b} \Leftrightarrow p = b \cos \alpha.$$

<sup>9</sup> Dois ângulos dizem-se **suplementares** se a soma das respectivas amplitudes é  $180^\circ$ .

<sup>10</sup> **Nicolas Léonard Sadi Carnot** (1796 -1832), físico, matemático e engenheiro francês que deu o primeiro modelo teórico de sucesso sobre as máquinas térmicas, o ciclo de Carnot, e apresentou os fundamentos da segunda lei da termodinâmica.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $[ACD]$  e  $[BCD]$ , obtém-se:

$$a^2 = h^2 + q^2 \text{ e } b^2 = h^2 + p^2 (\Leftrightarrow h^2 = b^2 - p^2).$$

Logo

$$a^2 = h^2 + q^2 = b^2 - p^2 + (c - p)^2 = b^2 + c^2 - 2pc = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad \blacksquare$$

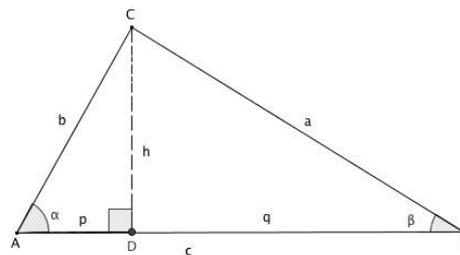


Figura 1.13 – Triângulo acutângulo

Analogamente à Lei dos senos, vejamos como definir o cosseno de um ângulo reto e de um ângulo obtuso de modo a que a Lei dos cossenos seja válida para triângulos retângulos e para triângulos obtusângulos.

Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ , de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ .

(i) No caso do triângulo ser **retângulo** em A (cf. Figura 1.14), pelo Teorema de Pitágoras, sabe-se que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Para que a Lei dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

seja válida neste triângulo devemos atribuir a  $\cos \alpha$  o valor 0. ■

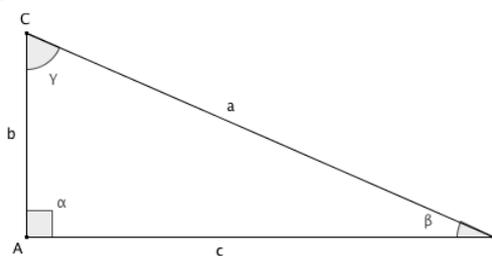


Figura 1.14 – Triângulo retângulo

(ii) No caso do triângulo ser **obtusângulo** em A, com  $h$  a altura do triângulo relativa à base  $[AB]$ , pela aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo  $[BCD]$  (cf. Figura 1.15), obtém-se

$$a^2 = h^2 + (d + c)^2.$$

Tem-se que

$$\sin \beta = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \sin \beta \quad \text{e} \quad (1)$$

$$\cos \beta = \frac{d}{b} \Leftrightarrow d = b \cos \beta. \quad (2)$$

De (1) e (2) obtém-se  $a^2 = (b \sin \beta)^2 + (b \cos \beta + c)^2$ . Donde

$$a^2 = b^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta + 2bc \cos \beta + c^2 = b^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + 2bc \cos \beta + c^2 = b^2 + 2bc \cos \beta + c^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \beta = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - \alpha).$$

Para que a Lei dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

seja válida neste triângulo devemos atribuir a  $\cos \alpha$  o valor de  $-\cos(180^\circ - \alpha)$ . ■

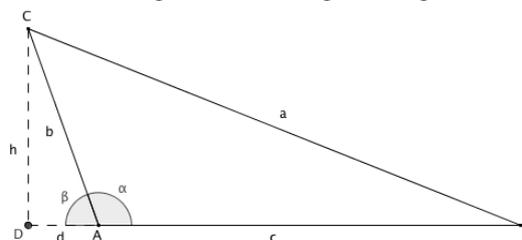


Figura 1.15 – Triângulo obtusângulo

Constata-se, assim, que a única forma possível de estender a Lei dos cossenos a triângulos retângulos e a triângulos obtusângulos é tomando  $\cos \alpha = 0$  quando o ângulo  $\alpha$  é um ângulo reto, e tomando  $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ , quando  $\alpha$  é um ângulo obtuso.

Anteriormente, constatámos que num triângulo retângulo, atendendo às definições de seno e de cosseno de um ângulo agudo,  $\alpha$ , se podia concluir que

$$0 < \sin \alpha < 1 \text{ e } 0 < \cos \alpha < 1.$$

Com a extensão das razões trigonométricas a ângulos retos e obtusos, observamos que o cosseno passa a assumir valores negativos e nulos, pelo que se tem

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

**OBSERVAÇÃO.** O Teorema de Carnot pode ser visto como uma generalização do Teorema de Pitágoras a triângulos arbitrários.

Iniciámos esta secção, estendendo alguns conceitos trigonométricos a ângulos retos e obtusos. Alternativamente, podemos começar por introduzir as definições de seno e cosseno de um ângulo reto e obtuso e, de seguida, verificar que a Lei dos senos e a Lei dos cossenos são válidas em qualquer triângulo arbitrário. Analisemos esta abordagem alternativa.

**DEFINIÇÃO 1.8** Dado um ângulo  $\alpha$  tal que  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

[A] Se  $\alpha = 90^\circ$ , então  $\text{sen } \alpha = 1$  e  $\text{cos } \alpha = 0$ .

[B]  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ .

[C]  $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$ .

Intuitivamente, atendendo à expressão geométrica do conceito de seno e de cosseno que analisamos de seguida, é fácil *aceitar* que  $\text{sen}(90^\circ) = 1$  e que  $\text{cos}(90^\circ) = 0$ .

Considere-se o triângulo [ABC] retângulo em B e de ângulo interno  $BAC$ . Vejamos o que acontece quando se aumenta a amplitude do ângulo  $BAC$  (cf. *Figura 1.16*).

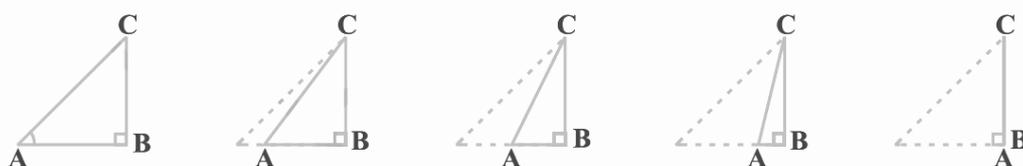


Figura 1.16 – Sequência de triângulos retângulos ( aumento da amplitude do ângulo  $BAC$ )

À medida que a amplitude do ângulo  $BAC$  se aproxima de  $90^\circ$ , ou seja, que o ponto A se aproxima do ponto B, a medida dos comprimentos de [AC] e de [BC] fica *praticamente* a mesma e a medida do comprimento de [AB] diminui.

Como  $\text{sen}(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AC}$  e  $\text{cos}(B\hat{A}C) = \frac{AB}{AC}$  podemos concluir que quando  $\alpha$  *tende* para  $90^\circ$ ,  $\text{sen } \alpha$  tende para 1 e  $\text{cos } \alpha$  tende para 0. Pelo que é intuitivo definir  $\text{sen}(90^\circ) = 1$  e  $\text{cos}(90^\circ) = 0$ .

Vejamos o que acontece à medida que diminui a amplitude do ângulo  $BAC$  (cf. *Figura 1.17*).

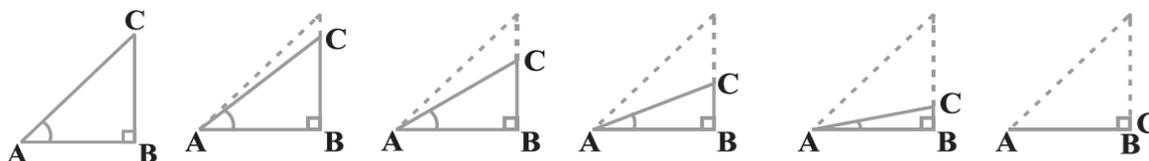


Figura 1.17 – Sequência de triângulos retângulos ( diminuição da amplitude do ângulo  $BAC$ )

À medida que a amplitude do ângulo  $BAC$  se aproxima de  $0^\circ$ , ou seja, que o ponto C se aproxima do ponto B, a medida do comprimento de [BC] diminui e a medida do comprimento de [AC] aproxima-se da medida do comprimento de [AB].

Como  $\text{sen}(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AC}$  e  $\text{cos}(B\hat{A}C) = \frac{AB}{AC}$  podemos concluir que quando  $\alpha$  *tende* para  $0^\circ$ ,  $\text{sen } \alpha$  tende para 0 e  $\text{cos } \alpha$  tende para 1. Pelo que é intuitivo definir  $\text{sen}(0^\circ) = 0$  e  $\text{cos}(0^\circ) = 1$ .

Da *expressão geométrica* dos conceitos de seno e de cosseno resulta a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 1.9** Considere-se um ângulo  $\alpha$ . Se  $\alpha = 0^\circ$ , então  $\text{sen } \alpha = 0$  e  $\text{cos } \alpha = 1$ .

### ■■■■ ENCANTO 1... À BOLEIA DE CARNOT

Tendo por base o Teorema de Carnot apresenta-se uma sequência de quatro exercícios onde nos propomos deduzir um conjunto de propriedades relativas a triângulos e a quadriláteros, sendo alguns resultados a base da demonstração do resultado seguinte.

**Exercício 1.1**

Considere-se um paralelogramo  $[ABCD]$  (cf. *Figura 1.18*).  
Fixada uma unidade de comprimento, mostre que  
 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$   
(ou ainda,  $2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ ).

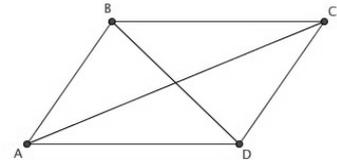


Figura 1.18 – Paralelogramo

**Resolução.** Vamos mostrar que a soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos das diagonais.

Considerem-se os triângulos  $[ABC]$  e  $[ABD]$ . Pela Lei dos Cossenos,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \overline{BC} \cos(\widehat{ABC}) \tag{1}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB} \overline{AD} \cos(\widehat{BAD}) . \tag{2}$$

Como  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{BC} = \overline{AD}$ , de (1) e de (2) tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 &= 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \overline{BC} \cos(\widehat{ABC}) - 2\overline{AB} \overline{BC} \cos(\widehat{BAD}) = \\ &= 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \overline{BC} \cos(\widehat{ABC}) + 2\overline{AB} \overline{BC} \cos(\widehat{ABC}) = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2. \end{aligned}$$

Como  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{BC} = \overline{AD}$  então  $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ .

Logo  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ . ■

**Exercício 1.2**

Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ . Seja M o ponto médio do lado  $[BC]$  do triângulo (cf. *Figura 1.19*). Mostre que  $4\overline{AM}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ .

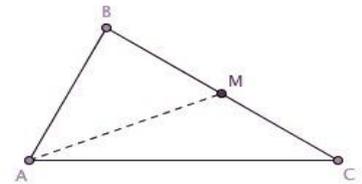


Figura 1.19 – Triângulo

**1ª Resolução.** Considere-se um triângulo  $[ABC]$  e o triângulo resultante de uma rotação de centro no ponto médio do lado  $[BC]$  e de amplitude  $180^\circ$ . Observe-se o polígono obtido por composição das duas figuras (cf. *Figura 1.20*).

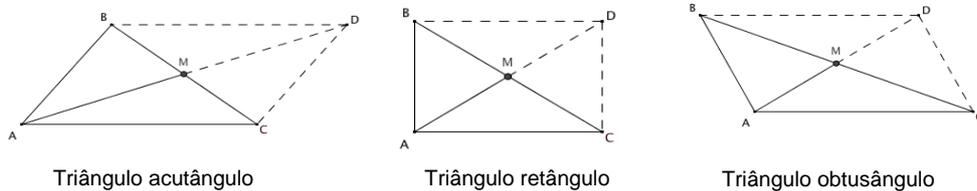


Figura 1.20 - Duplicação de um triângulo

Como se observa na figura anterior, da *duplicação*<sup>11</sup> do triângulo inicial resulta em qualquer das situações um paralelogramo  $[ABDC]$ . Pelo resultado do exercício 1.1, tem-se que

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2. \tag{1}$$

Como em todas as situações  $[ABDC]$  é um paralelogramo então  $\overline{AC} = \overline{BD}$  e  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .  $\tag{2}$

Tem-se que M é o ponto médio de  $[AD]$  logo  $\overline{AD} = 2\overline{AM}$ .  $\tag{3}$

De (1), de (2) e de (3) obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= (2\overline{AM})^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 4\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2 \\ &\Leftrightarrow 4\overline{AM}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2. \end{aligned}$$

**2ª Resolução.** Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo  $[ABM]$  (relativamente ao ângulo  $AMB$ ), tem-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \overline{AM} \overline{BM} \cos(\widehat{AMB}). \tag{1}$$

Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo  $[ACM]$  (relativamente ao ângulo  $AMC$ ), tem-se

<sup>11</sup> A estratégia de *Duplicação* consiste na criação de um novo polígono utilizando duas cópias da figura inicial.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2 \overline{AM} \overline{CM} \cos(\widehat{AMC}).$$

Como os ângulos  $AMB$  e  $AMC$  são suplementares tem-se  $\cos(\widehat{AMC}) = -\cos(\widehat{AMB})$ . Além disso, como  $M$  é o ponto médio de  $[BC]$ , tem-se  $\overline{BM} = \overline{CM}$ . Logo

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 + 2 \overline{AM} \overline{BM} \cos(\widehat{AMB}). \quad (2)$$

De (1) e de (2) obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2 \overline{AM} \overline{BM} \cos(\widehat{AMB}) + 2 \overline{AM} \overline{BM} \cos(\widehat{AMB}) \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = 2\overline{AM}^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}. \end{aligned}$$

Assim,  $2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 4\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2$ , ou seja,  $4\overline{AM}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ . ■

### Exercício 1.3

Considere-se um triângulo  $[ABC]$ . Sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente, os pontos médios dos lados  $[BC]$ ,  $[AC]$  e  $[AB]$  do triângulo (cf. *Figura 1.21*). Fixada uma unidade de comprimento, mostre que  $\frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) = \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2$ .

**Resolução.** Pelo resultado apresentado no exercício 1.2, tem-se que

$$\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) = \overline{AM}^2$$

$$\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2) = \overline{BN}^2$$

$$\frac{1}{4}(2\overline{BC}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = \overline{CP}^2$$

Logo  $\frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) = \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2$ . ■

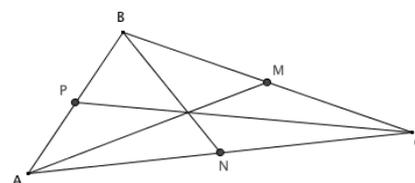


Figura 1.21 – Triângulo  $[ABC]$

### Exercício 1.4

Considere-se um quadrilátero  $[ABCD]$  com diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$  que se intersectam no interior da figura. Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos médios das diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$  (cf. *Figura 1.22*). Fixada uma unidade de comprimento, mostre que

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2.$$

**Resolução.** Vejamos que a soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos lados do quadrilátero é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos das diagonais com o quádruplo do quadrado da medida do comprimento do segmento formado pelos pontos médios das diagonais.

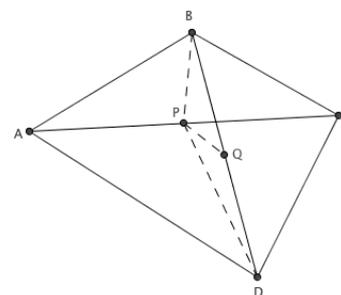


Figura 1.22 – Quadrilátero  $[ABCD]$

Considere-se o segmento  $[BP]$  e considere-se o triângulo  $[BPD]$ . Tem-se que  $[PQ]$  é uma mediana<sup>12</sup> deste triângulo. Aplicando o resultado demonstrado no exercício 1.2, obtém-se

$$4\overline{PQ}^2 = 2\overline{BP}^2 + 2\overline{PD}^2 - \overline{BD}^2. \quad (1)$$

Como  $[BP]$  é uma mediana do triângulo  $[ABC]$  e  $[DP]$  é uma mediana do triângulo  $[ACD]$ , então, novamente pelo resultado do exercício 1.2,

$$2\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 \quad (2) \quad \text{e} \quad 2\overline{PD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 \quad (3).$$

De (1), de (2) e de (3) obtém-se

$$4\overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2$$

Donde  $4\overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2$ , ou seja,  
 $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ .

<sup>12</sup> **Mediana** é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Neste último exercício, a parcela  $4\overline{PQ}^2$  mede, de alguma maneira, o *quanto* o quadrilátero se *afasta* de ser um paralelogramo. Quando o quadrilátero é um paralelogramo, os pontos  $P$  e  $Q$  são coincidentes, logo  $\overline{PQ}^2 = 0$  e recupera-se a expressão do exercício 1.1.



### 1.5. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Nesta secção apresentamos diferentes *olhares geométricos* sobre o seno de um ângulo e mostramos de que forma estes resultados permitem deduzir uma expressão trigonométrica da área do triângulo. Começamos por apresentar o enunciado de um teorema a que nos referiremos como «**Resultado basilar**».

**TEOREMA 1.5** Dado um triângulo, fixada uma unidade de comprimento, seja  $\alpha$  um ângulo agudo interno do triângulo. O quociente entre a medida do comprimento do lado oposto,  $a$ , ao ângulo  $\alpha$  e a medida do comprimento do diâmetro,  $D$ , da circunferência circunscrita ao triângulo é igual ao seno do ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\text{sen } \alpha = \frac{a}{D}$ .

**Demonstração.** Sabe-se que ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais, pelo que consideramos o caso em que o ângulo  $\alpha$  está inscrito numa semicircunferência, como ilustrado na figura (cf. *Figura 1.23*).

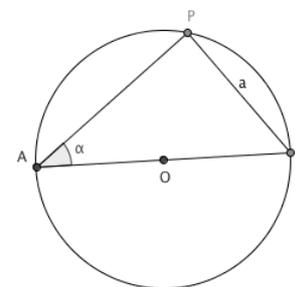


Figura 1.23 – Triângulo inscrito numa circunferência

Considere-se um triângulo [APB] inscrito numa semicircunferência, onde [AB] é um diâmetro da circunferência e  $\alpha = \widehat{PAB}$ , então o triângulo [APB] é triângulo retângulo em P (cf. *Anexo I.1*), donde  $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PB}}{D}$ , logo  $\text{sen } \alpha = \frac{a}{D}$ .

De seguida, enunciamos, um resultado que relaciona o seno de um ângulo interno de um triângulo com a área desse mesmo triângulo.

**TEOREMA 1.6** Dado um triângulo [ABC] com ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ , e de lados de medida de comprimento  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Fixada uma unidade de comprimento, a razão entre o dobro da área do triângulo,  $S$ , e o produto dos comprimentos dos lados que formam o respetivo ângulo é igual ao seno desse ângulo  $\alpha$ , ou seja,

$$\text{sen } \alpha = \frac{2S}{bc}$$

**Demonstração.** Considere-se  $S$  a área do triângulo e  $h_c$  a altura relativamente ao lado [AB] do triângulo.

*1ª Situação:*  $\alpha, \beta, \gamma$  ângulos agudos ( $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ) (cf. *Figura 1.24*)

Tem-se que  $S = \frac{1}{2}ch_c$  e  $\text{sen } \alpha = \frac{h_c}{b}$  ( $\Leftrightarrow h_c = b \text{sen } \alpha$ ).

Logo  $S = \frac{1}{2}ch_c \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}cb \text{sen } \alpha$ .

Pelo que  $\text{sen } \alpha = \frac{2S}{bc}$ .

*2ª Situação:*  $\alpha$  é um ângulo reto ( $\alpha = 90^\circ$ ) (cf. *Figura 1.25*).

Se  $\alpha = 90^\circ$ , tem-se um triângulo retângulo, pelo que

$S = \frac{1}{2}cb$  e  $b = h_c$ .

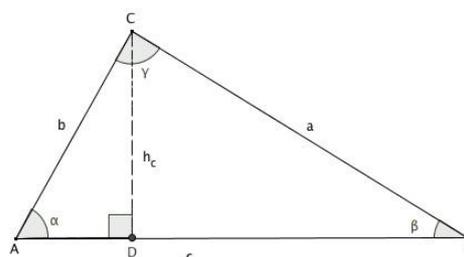


Figura 1.24 – Triângulo acutângulo

Como  $\text{sen}(90^\circ) = 1$  e  $\frac{2S}{bc} = \frac{2(\frac{1}{2}cb)}{bc} = 1$  tem-se a identidade pretendida. ■

3ª Situação:  $\alpha$  é um ângulo obtuso ( $\alpha > 90^\circ$ )(cf. Figura 1.26).

Se  $\alpha > 90^\circ$  então  $\text{sen } \alpha = \text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \theta = \frac{h_c}{b}$ .

Donde  $h_c = b \text{sen } \alpha$ . Pelo que

$$S = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}cb \text{sen } \alpha \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2S}{bc}. \quad \blacksquare$$

A título de curiosidade, refira-se que tendo por base a relação entre o seno de um ângulo interno de um triângulo e a respectiva área é possível obter alguns resultados geométricos relativos a quadriláteros, nomeadamente, escrever uma expressão trigonométrica para área de um quadrilátero, recorrendo às suas diagonais e ao seno do ângulo formado por elas (cf. Anexo I.2).

Sabe-se que a área de um triângulo é definida como o semiproduto do comprimento da altura pelo comprimento da base.

Recorrendo à definição da área de um triângulo e ao teorema anterior, podemos deduzir uma nova expressão para a área de um triângulo através de outros elementos que não a base e a altura.

Considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$  (cf. Figura 1.27).

Pelo Teorema 1.6 tem-se  $\text{sen } \alpha = \frac{2S}{bc}$ , onde  $S$  é a área do triângulo. Pelo que  $\text{sen } \alpha = \frac{2S}{bc} \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}bc \text{sen } \alpha$ .

Podemos então enunciar o resultado que se segue:

**TEOREMA 1.8** Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ . A área,  $S$ , do triângulo  $[ABC]$  é dada pelo semi produto das medidas dos comprimentos de dois lados do triângulo pelo seno do ângulo por eles formado, ou seja, a área é dada pela expressão:

$$S = \frac{1}{2}bc \text{sen } \alpha \quad \left[ \text{ou } S = \frac{1}{2}ac \text{sen } \beta \quad \text{ou } S = \frac{1}{2}ab \text{sen } \gamma \right].$$

Na expressão  $S = \frac{1}{2}bc \text{sen } \alpha$ , ao contrário da *habitual* expressão da área do triângulo, a medida do comprimento da altura não aparece indicada explicitamente, embora esteja implícita uma vez que  $b = h_c \text{sen } \alpha$ . Esta nova expressão tem a vantagem de estar escrita apenas em função da medida do comprimento de dois dos seus lados e do seno do ângulo formado por eles formado.

Mas será possível determinar a área de um triângulo conhecidos apenas os comprimentos dos seus 3 lados sem calcular a altura? Eis que surge a surpreendente Fórmula de Heron.

**FÓRMULA DE HERON**<sup>13</sup>. Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ ,

<sup>13</sup> **Heron de Alexandria** (10 d.C. – 70 d.C.), matemático e engenheiro grego, que se notabilizou nas áreas da geometria e mecânica. É especialmente conhecido pela Fórmula de Heron cuja demonstração se encontra no seu trabalho mais importante - *Metrica*.

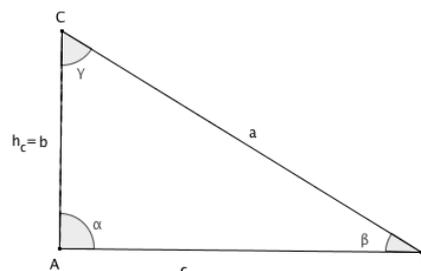


Figura 1.25 – Triângulo retângulo

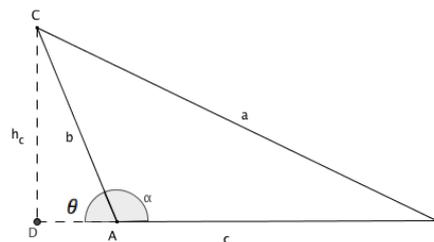


Figura 1.26 – Triângulo Obtusângulo

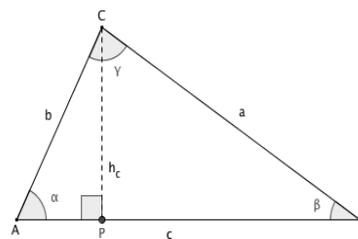


Figura 1.27 – Triângulo  $[ABC]$

de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e  $s = (a + b + c)/2$ . A área,  $S$ , do triângulo  $[ABC]$  é dada pela expressão

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

De seguida, apresentamos uma demonstração trigonométrica da fórmula de Heron. Em anexo, apresentamos duas outras demonstrações desta fórmula, uma algébrica e outra geométrica, que espelham abordagens alternativas de pensar sobre uma mesma figura inicial e um resultado que traduz a aplicação da Fórmula de Heron no caso particular do triângulo equilátero. (cf. *Anexo I.3*).

### Demonstração Trigonométrica.

Considere-se o triângulo  $[ABC]$  de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$  (cf. *Figura 1.28*).

Sabe-se que  $\sin \gamma = \frac{2S}{ab}$  (cf. *Teorema 1.6*), onde  $S$  é a área do

triângulo  $[ABC]$ . Pela Lei dos Cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \text{ logo}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\text{Assim, } \cos^2 \gamma = \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}.$$

Da Fórmula Fundamental da Trigonometria vem

$$\frac{4S^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Donde  $16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2$ , logo

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + (a^2 + b^2 - c^2))(2ab - (a^2 + b^2 - c^2)) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(-a^2 + 2ab - b^2 + c^2) = ((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2) = \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c). \end{aligned}$$

Obtém-se, assim,

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}. \tag{1}$$

Considere-se  $s = \frac{a+b+c}{2}$  então  $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$

$$-a + b + c = 2s - 2a = 2(s - a)$$

$$a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$$

Substituindo em (1), obtém-se

$$S = \frac{\sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}}{4} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \blacksquare$$

**OBSERVAÇÃO.** O cálculo da área de um triângulo, conhecidos os comprimentos dos seus três lados, pode ser conseguido sem recorrer à Fórmula de Heron. Haverá uma evidente vantagem de determinar a área do triângulo recorrendo à respetiva fórmula (cf. *Anexo I.4*)?

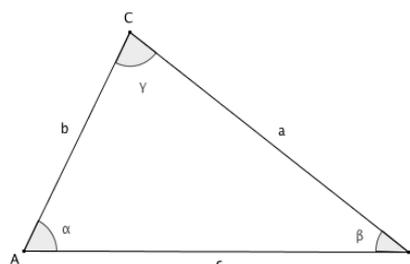


Figura 1.28 – Triângulo  $[ABC]$

## CAPÍTULO 2 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Ao estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos e da sua extensão a ângulos retos e a ângulos obtusos, segue-se, neste capítulo, a definição das razões trigonométricas de ângulos generalizados.

### 2.1. GENERALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE ÂNGULO E DE ARCO

Considere-se a semirreta com origem no ponto  $O$  representada na figura. A semirreta pode realizar movimentos de rotação em torno do ponto  $O$ , em dois sentidos: um pode ser efetuado no sentido contrário aos ponteiros do relógio, designado por *sentido positivo*; e outro no sentido dos ponteiros do relógio, designado por *sentido negativo* (cf. *Figura 2.1*).

Num dado ângulo o **lado origem** e o **lado extremidade** são semirretas com a mesma origem  $O$ , sendo que o lado extremidade é a posição final de uma semirreta que, partindo da posição coincidente com o lado origem, roda em torno do ponto  $O$ . Dependendo do sentido de rotação do lado extremidade, assim o ângulo tem orientação e amplitude positiva ou negativa.

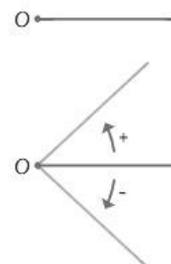


Figura 2.1 - Rotação de uma semirreta

**DEFINIÇÃO 2.1** Designa-se por **ângulo orientado** um ângulo  $\alpha$  não nulo nem giro, no qual se fixa um dos lados para lado origem e o outro para lado extremidade.

Desta definição resulta que a **amplitude**, em graus, **de um ângulo orientado** é um valor diferente de zero estritamente compreendido entre  $-360^\circ$  e  $360^\circ$ .

**OBSERVAÇÃO.** As amplitudes e as medidas de ângulos orientados com sentido negativo são precedidas do sinal “-”.

Será que faz sentido falar em **ângulos de amplitude superior a  $360^\circ$** ?

Considere-se dois exemplos de ângulos orientados, um positivo outro negativo, de amplitudes, respetivamente,  $40^\circ$  e  $-35^\circ$ . Para cada caso, vamos considerar o lado extremidade em movimento de rotação em torno do vértice do ângulo, no sentido do respetivo ângulo orientado, dando voltas completas, como é sugerido na figura (cf. *Figura 2.2*).

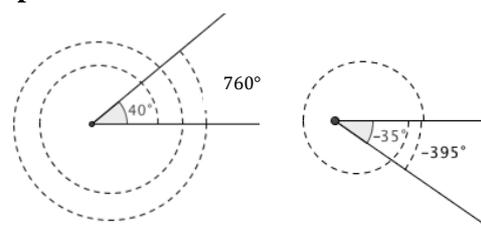


Figura 2.2 - Ângulos orientados

Observe-se que, no primeiro caso,  $760^\circ = 40^\circ + 2 \times 360^\circ$ , sendo  $40^\circ$  a amplitude de um ângulo orientado. Pelo que podemos associar um ângulo de medida de amplitude  $760^\circ$  a uma rotação de  $40^\circ$  de uma semirreta em torno do respetivo vértice, seguida de um movimento de rotação de duas voltas completas, igualmente no sentido positivo.

No segundo caso, tem-se  $-395^\circ = -35^\circ - 1 \times 360^\circ$ , sendo  $-35^\circ$  a amplitude de um ângulo orientado. Pelo que podemos associar um ângulo de medida de amplitude  $-395^\circ$  a uma rotação de  $-35^\circ$  de uma semirreta em torno do respetivo vértice, seguida de um movimento de rotação de uma volta completa no sentido negativo.

Desta forma é possível estender a noção de ângulo orientado a ângulos que podem ter medida de amplitude não pertencente a  $[-360^\circ, 360^\circ]$ . Assim, generalizando a noção de ângulo e de medida de amplitude de ângulo, tem-se que:

**DEFINIÇÃO 2.2** Designa-se por **ângulo generalizado** um par ordenado  $(\alpha, n)$ , onde  $\alpha$  é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e  $n$  é um número inteiro de sinal igual ao da amplitude de  $\alpha$ .

**DEFINIÇÃO 2.3** Considere-se  $\alpha$  um ângulo orientado ou um ângulo nulo e seja  $g$  a medida de amplitude de um ângulo giro. Designa-se a **medida da amplitude do ângulo generalizado**  $(\alpha, n)$  como sendo  $\alpha + ng$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

Por exemplo, a medida de amplitude do ângulo generalizado  $(80^\circ, 3)$  é dada por  $80^\circ + 3 \times 360^\circ$  donde se conclui que a amplitude do ângulo generalizado é  $1160^\circ$ .

**OBSERVAÇÃO.** Intuitivamente,  $|n|$  corresponde ao número de voltas completas associadas ao ângulo orientado.

Tendo em conta que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente, podemos também generalizar a noção de arco.

**DEFINIÇÃO 2.4.** Fixada uma unidade de amplitude de ângulo, considere-se uma circunferência de centro  $O$  e dois pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes à circunferência tais que  $\alpha = \widehat{PQ}$ . A cada par ordenado de pontos  $(P, Q)$  associamos uma **família de arcos** de amplitude  $\alpha + ng$ , com  $n \in \mathbb{Z}$  e  $g$  um ângulo giro.

## 2.2. GENERALIZAÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

A generalização das noções de ângulo e de arco conduzem-nos, naturalmente, à extensão da definição das razões trigonométricas, até ao momento definidas apenas para ângulos  $\alpha$  tais que  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Nesta secção apresentamos novas definições para as razões trigonométricas, que coincidem com as anteriores no caso dos ângulos agudos, retos e obtusos e no caso das tangentes de ângulos agudos.

Começemos por fixar no plano um referencial cartesiano ortonormado<sup>14</sup> com origem  $O$ . Seja  $\alpha$  um ângulo arbitrário. Vamos colocar o ângulo no referencial de modo que o vértice do ângulo coincida com a origem do referencial e que o *lado origem* do ângulo coincida com o semieixo positivo  $Ox$ , tal como ilustra a figura ao lado. (cf. *Figura 2.3*)

Se considerarmos, no referencial, um ângulo  $\alpha$  tal que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  e sobre o seu lado extremidade um ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$ , de acordo com as definições das razões trigonométricas de um ângulo agudo, tem-se que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{OP} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{OP} .$$

Dado que a escolha do ponto  $P$ , sobre o lado extremidade do ângulo, é arbitrária, sem perda de generalidade, vamos considerar  $\overline{OP} = 1$ . Desta forma, obtém-se  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{1} = y$  e  $\operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{1} = x$ .

Assim, a abcissa do ponto  $P$  é  $\operatorname{cos} \alpha$  e a ordenada é  $\operatorname{sen} \alpha$ , ou seja,  $P(\operatorname{cos} \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ .

De notar que fixado o ponto  $P$ , os valores do seno e do cosseno do ângulo ficam determinados, não dependendo da posição do mesmo sobre o lado extremidade, facto que resulta da relação de semelhança entre os triângulos que se formam.

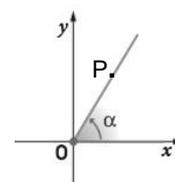


Figura 2.3 – Referencial o.n

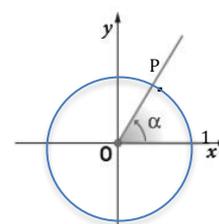


Figura 2.4 – Circunferência trigonométrica

<sup>14</sup> Designa-se por **referencial cartesiano ortonormado de um plano** e representa-se abreviadamente por o.n (ou simplesmente referencial o.n.) um referencial ortogonal (eixos perpendiculares) e monométrico, com a unidade de comprimento pré-fixada, comum aos dois eixos.

O ponto P pode ser encarado como o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência de centro em O e raio 1 (cf. *Figura 2.4*). Esta circunferência designa-se por **circunferência trigonométrica**. Mais usualmente e, por abuso de linguagem, esta circunferência é designada por **círculo trigonométrico** (designação adotada ao longo deste trabalho).

**OBSERVAÇÃO.** Diz-se que um ângulo pertence ao 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante, consoante o quadrante em que se situa o seu lado extremidade.

Assim podemos generalizar as razões trigonométricas, seno e cosseno, do seguinte modo:

**DEFINIÇÃO 2.5** Fixada uma unidade de medida de amplitude, considere-se no plano um referencial o.n. e  $\alpha$  um ângulo generalizado de lado origem no semieixo positivo  $Ox$ . Designa-se por **seno do ângulo  $\alpha$**  a ordenada do ponto de interseção do seu lado extremidade com o círculo trigonométrico e por **cosseno do ângulo  $\alpha$**  abcissa do ponto de interseção do seu lado extremidade com o círculo trigonométrico.

**OBSERVAÇÃO.** A identificação, no círculo trigonométrico (cf. *Figura 2.5*), do cosseno e do seno de um ângulo com as coordenadas – abcissa e ordenada – de um certo ponto faz com que o eixo das abcissas seja identificado como o **eixo dos cossenos** e o eixo das ordenadas como o **eixo dos senos**.

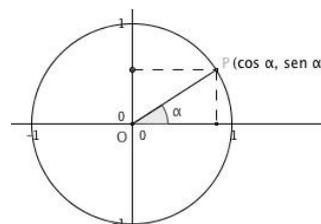


Figura 2.5 - Seno e cosseno de um ângulo  $\alpha$

Uma consequência imediata das definições anteriores resulta no seguinte teorema:

**TEOREMA 2.1** Fixada uma unidade de medida de amplitude, considere-se no plano um referencial o.n. e  $\alpha$  um ângulo generalizado de lado origem no semieixo positivo  $Ox$ . Então:  
 $sen(\alpha + k 360^\circ) = sen \alpha$  e  $cos(\alpha + k 360^\circ) = cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$ .

Com estas definições, constata-se que o seno e o cosseno podem agora assumir valores negativos, positivos ou nulos, dependendo do quadrante ou do semieixo em que o lado extremidade se encontra, e que, para qualquer ângulo generalizado, se tem  $-1 \leq sen \alpha \leq 1$  e  $-1 \leq cos \alpha \leq 1$ .

Recorrendo ao círculo trigonométrico é possível analisar a **variação** do seno e do cosseno em cada um dos quadrantes, ou seja, analisar o crescimento ou decréscimo destas razões à medida que as amplitudes dos ângulos aumentam. Esta situação é apresentada na tabela seguinte, onde "↗" significa que a razão trigonométrica é crescente no quadrante assinalado e "↘" significa que a razão trigonométrica é decrescente (cf. *Tabela 2.1*).

Tabela 2.1 - Variação do seno e do cosseno em função dos quadrantes

Amplitude	0°		90°		180°		270°		360°
<b>sen <math>\alpha</math></b>	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
<b>cos <math>\alpha</math></b>	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Para além da variação, é também possível, recorrendo ao círculo trigonométrico, analisar o **sinal** do seno e do cosseno em cada um dos quadrantes. Na tabela seguinte apresenta-se esse estudo, onde "+" significa que a razão trigonométrica é positiva no quadrante assinalado e "-" significa que a razão trigonométrica é negativa (cf. *Tabela 2.2*).

Tabela 2.2 - Sinal do seno e do cosseno em função dos quadrantes

Quadrante	1º	2º	3º	4º
<b>sen <math>\alpha</math></b>	+	+	-	-
<b>cos <math>\alpha</math></b>	+	-	-	+

Vejamos se é possível definir a tangente de um ângulo generalizado a partir das coordenadas de um ponto, à semelhança do que foi feito para o seno e para o cosseno.

Consideremos a reta que contém o lado extremidade de um ângulo generalizado  $\alpha$  e a reta tangente ao círculo no ponto  $(1,0)$ , designada por *eixo das tangentes*. Seja T o ponto de interseção das duas retas, então T tem coordenadas  $(1, y)$  (cf. *Figura 2.6*). Tal como no caso do seno e do cosseno, o valor da tangente não depende da posição do ponto P sobre o lado extremidade, pelo que a semelhança de triângulos garante que  $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{y}{1}$ , ou seja,  $y = \text{tg } \alpha$ .

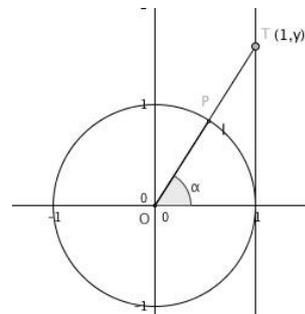


Figura 2.6 - Reta das tangentes

**OBSERVAÇÃO.** A tangente não pode ser definida para ângulos cujo lado extremidade esteja sobre o eixo  $Oy$  dado que esta reta não interseca o eixo das tangentes.

Podemos então enunciar a definição de tangente de um ângulo generalizado:

**DEFINIÇÃO 2.6** Fixada uma unidade de medida de amplitude, considere-se no plano um referencial o.n. e  $\alpha$  um ângulo generalizado de lado origem no semieixo positivo  $Ox$ . Designa-se por **tangente do ângulo  $\alpha$**  a ordenada do ponto de interseção da reta que contém o lado extremidade do ângulo com o eixo das tangentes.

Observe-se que se o ângulo pertencer ao 4º quadrante, a tangente coincide com a ordenada do ponto de interseção da reta  $x = 1$  com o lado extremidade de  $\alpha$ . No caso do ângulo pertencer ao 2º ou 3º quadrante, o lado extremidade de  $\alpha$  não interseca a reta  $x = 1$ ; nestes casos, prolonga-se o lado extremidade do ângulo de modo a que intersete essa reta e a tangente é então a ordenada do ponto de interseção desse prolongamento.

Uma consequência imediata da definição é a seguinte propriedade:

**TEOREMA 2.2** Fixada uma unidade de medida de amplitude, considere-se no plano um referencial o.n. e  $\alpha$  um ângulo generalizado de lado origem no semieixo positivo  $Ox$ . Então

$$\text{tg } (\alpha + k180^\circ) = \text{tg } \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

À semelhança do seno e do cosseno de um ângulo, recorrendo ao círculo trigonométrico é possível analisar a **variação** da tangente em cada um dos quadrantes. Esta situação é apresentada na tabela seguinte, onde que "↗" significa que a tangente é crescente no quadrante assinalado (cf. *Tabela 2.3*).

Tabela 2.3 - Variação da tangente em função dos quadrantes

Amplitude	0°		90°		180°		270°		360°
<b>tg <math>\alpha</math></b>	0	↗	Não definida	↗	0	↗	Não definida	↗	0

Como a tangente de um ângulo  $\alpha$  é igual à ordenada do ponto de interseção da reta que contém o lado extremidade desse ângulo com o eixo das tangentes, o **sinal** da tangente de  $\alpha$  é igual ao sinal da ordenada desse ponto. Na tabela seguinte apresenta-se o estudo do sinal da tangente de  $\alpha$ , onde que "+" significa que tangente de  $\alpha$  é positiva no quadrante assinalado e "-" significa que a tangente de  $\alpha$  é negativa (cf. *Tabela 2.4*).

Tabela 2.4 - Sinal da tangente em função dos quadrantes

Quadrante	1º	2º	3º	4º
<b>tg <math>\alpha</math></b>	+	-	+	-

### 2.3. GENERALIZAÇÃO DAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

As relações trigonométricas estudadas no capítulo anterior relativas a ângulos agudos, podem, agora, ser generalizadas para qualquer ângulo. Vejamos alguns exemplos.

O facto de um ponto de coordenadas  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  pertencer à circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ , qualquer que seja o ângulo generalizado  $\alpha$ , prova que a Fórmula Fundamental da trigonometria é válida para qualquer ângulo, ou seja,

**TEOREMA 2.3** Fixada uma unidade de medida de amplitude e dado um ângulo generalizado  $\alpha$ , tem-se que

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Por outro lado, se  $\alpha \neq 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$  tem-se que  $\cos \alpha \neq 0$ . Pelo que podemos dividir ambos os membros da igualdade anterior por  $\cos^2 \alpha$  e obtém-se :

**TEOREMA 2.4** Fixada uma unidade de medida de amplitude e dado um ângulo generalizado  $\alpha$ , tem-se que

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Embora tenhamos optado apenas por apresentar as demonstrações de duas relações, todas as identidades trigonométricas apresentadas no Teorema 1.1 são válidas para ângulos generalizados.

Para além das identidades já apresentadas, podem estabelecer-se outras relações entre as razões trigonométricas de certos ângulos em virtude das simetrias que existem entre os seus lados extremidades.

Na análise das situações que se seguem, representamos  $\alpha$  no 1º quadrante, embora as mesmas sejam válidas independentemente do quadrante onde  $\alpha$  se encontra representado.

**A.** Relações entre as razões trigonométricas de ângulos suplementares, ou seja, entre  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$ .

Como se observa na figura, os pontos P e P' são simétricos relativamente ao eixo Oy pelo que têm abcissas simétricas e a mesma ordenada. Os pontos T e T' são simétricos em relação ao eixo Ox pelo que têm ordenadas simétricas e a mesma abcissa (cf. Figura 2.7).

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

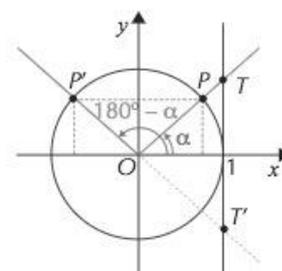


Figura 2.7 - Ângulos suplementares

**B.** Relações entre as razões trigonométricas de ângulos de extremidades simétricas em relação à origem, ou seja, relações entre  $\alpha$  e  $180^\circ + \alpha$ .

Por observação da figura, constata-se que os lados extremidades de  $\alpha$  e de  $180^\circ + \alpha$  pertencem à mesma reta que passa pela origem, pelo que os pontos P e P' são simétricos em relação à origem e T e T' são coincidentes (cf. Figura 2.8).

Logo

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

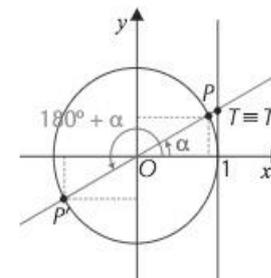


Figura 2.8 - Ângulos de extremidades simétricas em relação à origem

**C.** Relações entre as razões trigonométricas de ângulos de extremidades simétricas em relação ao eixo  $Ox$  (ângulos simétricos), ou seja, relações entre  $\alpha$  e  $-\alpha$  (cf. *Figura 2.9*).

Da simetria dos lados de extremidade de  $\alpha$  e de  $-\alpha$  relativamente ao eixo  $Ox$  resulta a simetria dos pontos  $P$  e  $P'$  e dos pontos  $T$  e  $T'$  em relação ao mesmo eixo, pelo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

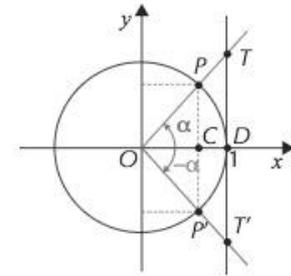


Figura 2.9 - Ângulos de extremidades simétricas a  $Ox$

**D.** Relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, ou seja, relações entre  $\alpha$  e  $90^\circ - \alpha$ .

O lado extremidade de  $90^\circ - \alpha$  obtém-se por simetria do lado extremidade de  $\alpha$  em relação à reta  $y = x$ , pelo que abcissa do ponto  $P$  é igual à ordenada de  $P'$  e a ordenada de  $P$  é igual à abcissa de  $P'$  (cf. *Figura 2.10*). Tem-se que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha \text{ logo} \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

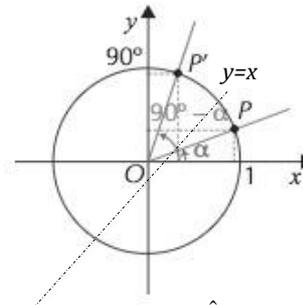


Figura 2.10 - Ângulos complementares

**E.** Relações entre as razões trigonométricas de ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ + \alpha$ .

O lado extremidade de  $90^\circ + \alpha$  obtém-se por simetria do lado de  $\alpha$  em relação à reta  $y = x$  seguida de uma simetria em relação ao eixo  $Oy$ , pelo que abcissa do ponto  $P$  é igual à ordenada de  $P'$  e a ordenada de  $P$  é simétrica à de  $P'$  (cf. *Figura 2.11*). Tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \text{ logo} \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

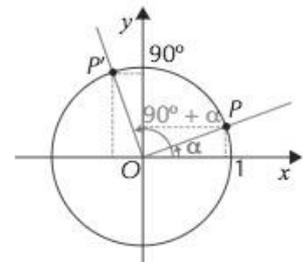


Figura 2.11 - Ângulos  $\alpha$  e  $90^\circ + \alpha$

As relações trigonométricas anteriores permitem determinar o valor exato das razões trigonométricas de um ângulo generalizado, determinando as razões trigonométricas de um ângulo do primeiro quadrante. Habitualmente, designa-se este procedimento por **redução ao primeiro quadrante**.

## 2.4. RADIANO

Até ao momento tem-se usado o **grau** como unidade de medida de amplitude de ângulo e de arco. Sendo o grau a unidade base do sistema sexagesimal é usual expressar as frações do grau em minutos e segundos. Assim, 1 grau corresponde a 60 minutos e cada minuto corresponde a 60 segundos, ou seja,  $1^\circ = 60'$  e  $1' = 60''$ .

Por exemplo, um ângulo correspondente a 30 graus, 10 minutos e 24 segundos, representa-se abreviadamente, por  $30^\circ 10' 24''$  e a sua medida, em graus, é  $30 + \frac{10}{60} + \frac{24}{3600} \cong 30,17$ .

Nesta secção apresentamos a unidade de medida de um novo sistema de amplitude de ângulos designado por **sistema circular**.

Considere-se uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes à circunferência tais que  $\widehat{AB} = \alpha$  e o comprimento do arco  $AB$  é igual ao raio da circunferência (cf. *Figura 2.12*). Neste caso, tem-se que  $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360^\circ \times r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

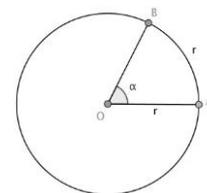


Figura 2.12- Circunferência de centro  $O$  e raio  $r$

Concluimos, assim, que numa circunferência a amplitude, em graus, de um ângulo ao centro correspondente a um arco de comprimento igual ao raio é constante e igual a  $\frac{180^\circ}{\pi}$ .

Dado que esta amplitude não depende da circunferência considerada, podemos então considerar o comprimento do raio como uma unidade de medida de ângulo.

**DEFINIÇÃO 2.7** Designa-se por **radiano**<sup>15</sup>, e representa-se abreviadamente por *rad*, a medida de amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio (cf. *Figura 2.13*)

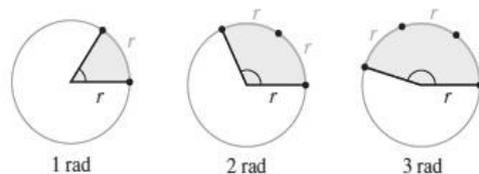


Figura 2.13 Conceito de radiano

Temos, assim, que  $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,3^\circ$ .

Qual será a medida, em radianos, de um ângulo giro?

Sabe-se que a medida do comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $2\pi r$ . Tem-se que o um radiano corresponde a um arco de comprimento igual ao raio e que o raio *cabe*  $2\pi$  vezes na circunferência, ou seja, um radiano cabe  $2\pi$  vezes num arco (ou ângulo) de  $360^\circ$ , logo

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad. Tem-se, ainda, que}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad e } 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Observe-se que a partir de qualquer uma das relações anteriores é possível converter graus em radianos e radianos em graus.

Analisemos a seguinte situação: O Joaquim escreveu  $\text{sen } 1 = 0,84147 \dots$  mas esqueceu-se de indicar qual a unidade de amplitude de ângulo. Pretendia escrever  $1^\circ$  ou  $1 \text{ rad}$ ?

Começemos por escrever a amplitude do ângulo  $1 \text{ rad}$  no sistema sexagesimal.

Tem-se que  $180^\circ = \pi \text{ rad}$  pelo que  $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \cong 57,30^\circ$ .

Como  $1^\circ < 30^\circ$  então  $\text{sen } 1^\circ < \text{sen } (30^\circ)$ .

Sabe-se que  $\text{sen } (30^\circ) = \frac{1}{2}$ . Logo  $\text{sen } 1^\circ < 0,5$ .

Como  $\text{sen } 1 = 0,84147$  então o ângulo definido pelo Joaquim é  $1 \text{ rad}$ .

**OBSERVAÇÃO.** Por vezes, simplifica-se a escrita não referindo a unidade de medida das amplitudes dos ângulos. Nestes casos, subentende-se que a unidade de medida é o radiano.

A utilização do radiano como unidade de medida permite definir o seno, cosseno e tangente de qualquer número real. De facto, dado um  $x \in \mathbb{R}$  podemos identificar o seno de  $x$  (cosseno de  $x$  ou tangente de  $x$ ) como o seno (cosseno ou tangente) de um ângulo generalizado de amplitude  $x$ , em radianos. A introdução desta nova unidade – radiano, permite, assim, estender o conceito de razões trigonométricas para funções trigonométricas reais como veremos mais adiante (cf. *Capítulo 4*).

<sup>15</sup> O termo *radian* foi publicado pela primeira vez, em 1873, num exame escrito aplicado pelo físico James T. Thomson. Em conjunto com Thomas Müir e no âmbito dos trabalhos desenvolvidos, sentiram a necessidade de criar uma nova unidade angular – o **radiano** - com finalidade de simplificar algumas fórmulas matemáticas e físicas (especialmente, derivadas e integrais de funções trigonométricas e expressões relacionadas com velocidades e acelerações no movimento curvilíneo).

## CAPÍTULO 3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Como vimos anteriormente, das definições das razões trigonométricas de um mesmo ângulo resultam algumas relações entre elas. Neste capítulo apresentamos algumas identidades trigonométricas relativas à soma e à diferença de dois ângulos, à duplicação e bissecção de um ângulo, a ângulos múltiplos, entre outras.

### 3.1. FÓRMULAS DA SOMA E DA DIFERENÇA (ou fórmulas da adição e subtração)

Começemos com a expressão  $\text{sen}(\alpha + \beta)$ . Será que  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha + \text{sen} \beta$ ?

Considere-se, por exemplo,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 90^\circ$ . Substituindo em ambos os membros, obtém-se

$$\text{sen}(0^\circ + 90^\circ) = \text{sen}(90^\circ) = 1 \text{ e } \text{sen}(0^\circ) + \text{sen}(90^\circ) = 0 + 1 = 1.$$

Conclui-se que  $\text{sen}(0^\circ + 90^\circ) = \text{sen}(0^\circ) + \text{sen}(90^\circ)$ .

No entanto, se  $\alpha = 90^\circ$  e  $\beta = 60^\circ$ , tem-se que

$$\text{sen}(90^\circ + 60^\circ) = \text{sen}(150^\circ) = \text{sen}(180^\circ - 150^\circ) = \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\text{sen}(90^\circ) + \text{sen}(60^\circ) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

O exemplo anterior mostra que nem sempre é possível estabelecer uma relação de *linearidade*, isto é, o seno da soma da amplitude de dois ângulos nem sempre é a soma dos senos da amplitude de cada ângulo. Na tabela seguinte, ilustram-se mais alguns exemplos (cf. Tabela 3.1).

Tabela 3.1 – Relação entre  $\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta$  e  $\text{sen}(\alpha + \beta)$

$\alpha$	$\beta$	$\text{sen} \alpha$	$\text{sen} \beta$	$\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta$	$\text{sen}(\alpha + \beta)$
$60^\circ$	$30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$	1
$45^\circ$	$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1
$30^\circ$	$45^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}(75^\circ)$

Relativamente à última linha da tabela, tem-se que  $75^\circ < 90^\circ$  pelo que  $\text{sen}(75^\circ) < \text{sen}(90^\circ)$ , donde  $\text{sen}(75^\circ) < 1$ .

Conclui-se, assim, que  $\text{sen}(35^\circ) + \text{sen}(45^\circ) > \text{sen}(30^\circ + 45^\circ)$ .

Por observação da tabela, constatamos, ainda, que para os vários valores escolhidos  $\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta > \text{sen}(\alpha + \beta)$ .

Se considerarmos uma circunferência de diâmetro  $[AC]$ , com  $\overline{AC} = 1$  e  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos internos dos triângulos  $[ACD]$  e  $[ABC]$ , respetivamente (cf.

Figura 3.1), aplicando o resultado basilar, tem-se

$$\text{sen} \alpha = \overline{CD}, \text{sen} \beta = \overline{BC} \text{ e } \text{sen}(\alpha + \beta) = \overline{BD}.$$

Logo pela desigualdade triangular,

$$\overline{CD} + \overline{BC} > \overline{BD} \Leftrightarrow \text{sen} \alpha + \text{sen} \beta > \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Apresentamos, de seguida, duas identidades trigonométricas relativas ao seno e ao cosseno da soma de dois ângulos.

**TEOREMA 3.1** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha + \beta$  um ângulo convexo. Então

[A]  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha.$

[B]  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta.$

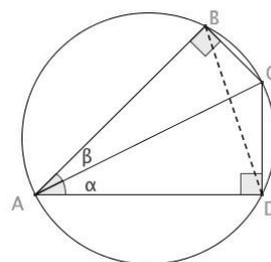


Figura 3.1 – Ângulos inscritos numa circunferência.

Vamos considerar três casos, no entanto, apresentamos apenas a demonstração da fórmula do seno e do cosseno da adição, no primeiro caso. A prova dos restantes casos encontra-se em anexo (cf. Anexo II.1):

1.  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .
2.  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta \geq 90^\circ$ .
3.  $\alpha > 90^\circ$  e  $\alpha + \beta$  convexo.

**Demonstração (Caso 1).** Para a prova da fórmula [A], considere-se os triângulos [ABC] e [ADB] retângulos em C e B, respetivamente, com ângulos internos  $\alpha = \widehat{CAB}$  e  $\beta = \widehat{BAD}$  sendo  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta < 90^\circ$ . A partir da composição dos dois triângulos obtém-se um quadrilátero [ADBC] como se ilustra na figura (cf. Figura 3.2).

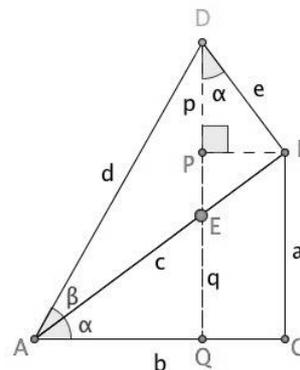


Figura 3.2 – Composição de dois triângulos retângulos

Considere-se o segmento de reta DQ perpendicular ao segmento de reta AC. Obtém-se um novo triângulo retângulo [ADQ] com um ângulo interno  $\alpha + \beta$ .

Sejam a, b, c, d, e, p, q como indicados na figura. Observe-se que  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{PD} = p$ ,  $\overline{PQ} = q$  e  $\overline{DQ} = p + q$ .

Os triângulos [AEQ] e [EDB] são semelhantes dado que  $\widehat{AEQ} = \widehat{DEB}$  e  $\widehat{AQE} = \widehat{EBD}$ . Logo  $\widehat{QAE} = \widehat{EDB} = \alpha$ .

Tem-se que

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \tag{1}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{e}{d} \tag{2}$$

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{\overline{DQ}}{d} = \frac{p+q}{d} = \frac{p}{d} + \frac{q}{d} = \frac{p}{d} + \frac{a}{d}$$

De (1) e de (2) tem-se que  $\frac{p}{d} = \frac{p}{e} \times \frac{e}{d} = \cos \alpha \text{ sen } \beta$  e  $\frac{a}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{d} = \text{sen } \alpha \cos \beta$ .

Assim,  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$ .

Para a prova da fórmula [B] observe-se que do triângulo [ADB] (cf. Figura 3.2) se obtém

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AD} \text{ sen } \beta \tag{3}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AD} \cos \beta. \tag{4}$$

Do triângulo [PDB] e de (3) tem-se que  $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{QC} = \overline{AD} \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta$

e do triângulo [ABC] e de (4) tem-se que  $\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AD} \cos \alpha \cos \beta$ .

Assim,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC} - \overline{QC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} \cos \alpha \cos \beta - \overline{AD} \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta}{\overline{AD}} = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ . ■

Em anexo, apresentamos uma demonstração alternativa da fórmula do seno da soma de dois ângulos, para o caso em que  $\alpha, \beta < 90^\circ$ , que tem por base relações trigonométricas estudadas anteriormente, nomeadamente, a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a relação entre o seno de um ângulo interno de um triângulo e a respetiva área (cf. Anexo II.2).

À semelhança do seno e do cosseno, também no caso da tangente é possível estabelecer uma relação relativa à adição de dois ângulos:

**TEOREMA 3.2** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha + \beta$  um ângulo convexo. Então

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta}.$$

Apresentam-se, de seguida, duas demonstrações da fórmula da adição da tangente, uma algébrica com base em identidades trigonométricas previamente estudadas e uma geométrica (apenas no caso em que  $\alpha + \beta < 90^\circ$ ) que tem por base o Teorema de Tales.

### Demonstração algébrica.

Recorrendo às fórmulas da adição do seno e do cosseno, obtém-se

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sen } \beta \text{ cos } \alpha}{\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}.$$

Dividindo a expressão por  $\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta$  obtém-se

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{\text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sen } \beta \text{ cos } \alpha}{\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta}}{\frac{\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}{\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta}} = \frac{\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta}{\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta}}{1 - \frac{\text{sen } \alpha \times \text{sen } \beta}{\text{cos } \alpha \times \text{cos } \beta}} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}. \quad \blacksquare$$

### Demonstração geométrica.

Considere-se dois ângulos adjacentes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .

Considere-se os triângulos [OBF] e [OBE] retângulos em B com ângulos internos  $\alpha = \widehat{BOF}$  e  $\beta = \widehat{BOE}$  (cf. Figura 3.3). Seja  $\overline{OB} = 1$ .

Considere-se o segmento de reta EF tangente, no ponto B, ao arco centrado no vértice do ângulo  $\alpha$  e de raio 1. Seja G o ponto de interseção da reta OE com a reta tangente à circunferência no ponto H ( $\overline{OH} = 1$ ).

Considere-se, ainda, o segmento de reta ED perpendicular ao segmento de reta OF. Obtém-se um novo triângulo [EOD] retângulo em D com um ângulo interno  $\alpha + \beta$ .

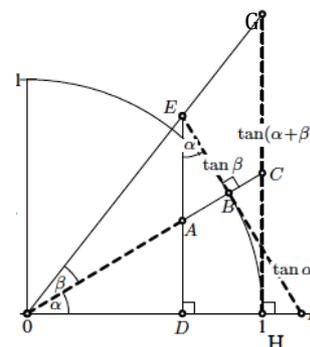


Figura 3.3 – Demonstração geométrica

Do triângulo [OBF] obtém-se  $tg \alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{OB}} = \overline{BF}$ . (1)

Do triângulo [OEB] obtém-se  $tg \beta = \frac{\overline{EB}}{\overline{OB}} = \overline{EB}$ . (2)

Dado que os triângulos [OAD] e [EAB] são semelhantes ( $\widehat{OAD} = \widehat{EAB}$  e  $\widehat{ODA} = \widehat{ABE} = 90^\circ$ ), tem-se  $\widehat{AEB} = \widehat{AOD} = \alpha$ .

Do triângulo [ABE] e de (2) resulta  $tg \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = tg \alpha tg \beta$ .

Pelo Teorema de Tales, tem-se

$$\frac{tg(\alpha + \beta)}{\overline{ED}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{ED} \times \overline{OC}}{\overline{OA}} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{OC}}{1} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}}. \quad (4)$$

De (3) e de (4) tem-se  $tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{ED}}{\overline{OA}} \cdot \overline{OC} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{EB} + \overline{BF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{EB} + \overline{BF}}{1 - \overline{AB}}$ .

De (1) e de (2) tem-se  $tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{EB} + \overline{BF}}{1 - \overline{AB}} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}$ . ■

A partir das fórmulas da soma estudadas anteriormente, podemos deduzir fórmulas trigonométricas relativas à diferença entre ângulos. Substituindo, nas fórmulas da adição,  $\beta$  por  $-\beta$  obtém-se os seguintes resultados:

**TEOREMA 3.3** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha - \beta$  um ângulo convexo. Então

[A]  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \beta \text{ cos } \alpha$ .

[B]  $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ .

[C]  $tg(\alpha - \beta)^{16} = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha tg \beta}$ .

Apresenta-se, de seguida, a demonstração algébrica da fórmula da diferença do seno e da

<sup>16</sup> (cf. Anexos VI.4\_ Estórias que a história nos conta).

fórmula da diferença do cosseno.

**Demonstração.**

[A] Considere-se a identidade trigonométrica  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Sabe-se que } \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen } \alpha \text{ e que } \cos(-\alpha) = \cos \alpha. \text{ Então} \\ \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{sen } \alpha \cos(-\beta) + \text{sen}(-\beta) \cos \alpha = \\ &= \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

[B] Considere-se a identidade trigonométrica  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \text{sen } \alpha \text{sen}(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**OBSERVAÇÃO.** As identidades estudadas neste capítulo, para ângulos convexos, são facilmente generalizadas para quaisquer amplitudes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , atendendo à definição do seno, cosseno e tangente de um número real. Apresentamos apenas a demonstração da fórmula da diferença do seno, dado que as restantes são semelhantes.

Considere-se fixada uma unidade de medida de amplitude. Seja  $g$  a medida de amplitude de um ângulo giro e  $\alpha + k_1g, \beta + k_2g, k \in \mathbb{Z}$ , dois ângulos generalizados, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{sen}((\alpha + k_1g) - (\beta + k_2g)) &= \text{sen}((\alpha - \beta) + g(k_1 - k_2)) = \\ &= \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha = \\ &= \text{sen}(\alpha + k_1g) \cos(\beta + k_2g) - \text{sen}(\beta + k_2g) \cos(\alpha + k_1g). \end{aligned}$$

Provou-se, assim, que as identidades que se demonstraram ser válidas para medidas de amplitudes de ângulos convexos, são válidas para quaisquer medidas de amplitudes.

■■■■ ENCANTO 2... DE MÃOS DADAS COM A GEOMETRIA

Neste encanto apresentamos uma demonstração da equivalência entre o Teorema de Ptolomeu<sup>17</sup> e a fórmula da soma do seno de dois ângulos.

Começamos por apresentar alguns resultados relativos a quadriláteros cíclicos. As demonstrações dos teoremas encontram-se em anexo (cf. Anexo II.3).

**DEFINIÇÃO 3.1** Um quadrilátero [ABCD] diz-se **cíclico** se os seus vértices são pontos de uma circunferência. Abreviadamente, escrevemos QC para quadrilátero cíclico.

**TEOREMA 3.4** Um quadrilátero é cíclico se e só se os seus ângulos opostos são suplementares.

**OBSERVAÇÃO.** Do teorema resulta que o único paralelogramo possível de inscrever numa circunferência é o retângulo. Nesta situação, a interseção das diagonais coincide com o centro da circunferência circunscrita e o raio da circunferência é metade da medida do comprimento de uma qualquer diagonal (cf. Figura 3.4).

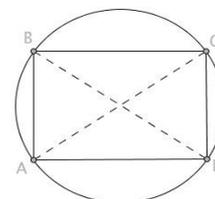


Figura 3.4 - Paralelogramo inscrito numa circunferência

O teorema anterior mostra, ainda, ser possível caracterizar um quadrilátero cíclico com base na amplitude dos seus ângulos. E o que se pode afirmar relativamente aos comprimentos os lados de um QC?

Considere-se um retângulo [ABCD] inscrito numa circunferência (cf. Figura 3.4) e os

<sup>17</sup> **Cláudio Ptolomeu** (85 d.C.-165 d. C.), matemático, astrónomo e geógrafo grego, dedicou-se às ciências matemáticas, em particular à astronomia. Publicou a obra *Almagesto*, um tratado em treze livros, sobre astronomia.

comprimentos dos respectivos lados. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se os comprimentos das diagonais. A tabela que se segue apresenta dois exemplos, onde se relaciona também outras relações para os três pares de comprimentos considerados (cf. Tabela 3.2).

Tabela 3.2 – Relação dos comprimentos dos lados e das diagonais de um QC

$\overline{AB} = \overline{CD}$	$\overline{BC} = \overline{AD}$	$\overline{AC} = \overline{BD}$	$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}$	$\overline{AC} \times \overline{BD}$
<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>25</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>5</b>	$\sqrt{41}$	<b>41</b>	<b>41</b>

Através da análise da tabela, constatamos que o produto das medidas dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos comprimentos dos lados opostos de um retângulo. Esta propriedade é válida em qualquer QC como nos diz o próximo resultado.

**TEOREMA DE PTOLOMEU.** Fixada uma unidade de comprimento, um quadrilátero  $[ABCD]$  é cíclico se e só se o produto das medidas dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos comprimentos dos lados opostos, ou seja,

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}.$$

**OBSERVAÇÕES.**

1. Observe-se que quatro pontos determinam seis medidas de comprimento e que, no caso do teorema de Ptolomeu (cf. Figura 3.5), as seis são utilizadas.
2. Considere-se, o caso em que o quadrilátero cíclico é um retângulo  $[ABCD]$  (cf. Figura 3.6). Pelo Teorema de Ptolomeu tem-se que  $\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}$ . Como  $\overline{AC} = \overline{BD}$ ,  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{BC} = \overline{AD}$  então  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ . Nesta situação, o teorema de Ptolomeu fica reduzido à sua expressão mais simples, ao Teorema de Pitágoras.

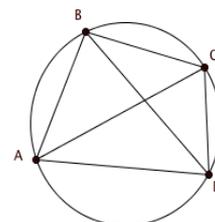


Figura 3.5 – QC

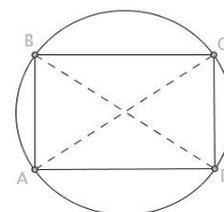


Figura 3.6 – Retângulo inscrito numa circunferência

Analisadas algumas das propriedades relativas a quadriláteros cíclicos, retomemos o objetivo principal deste encanto.

Para mostrar a equivalência entre o Teorema de Ptolomeu e a fórmula da adição do seno, é conveniente escrever os comprimentos dos lados e das diagonais do quadrilátero em função de razões trigonométricas dos ângulos. Mas como fazê-lo?

Considere-se um quadrilátero  $[ABCD]$  cíclico inscrito numa circunferência de diâmetro 1 e os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  tais que

$$\alpha = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}, \beta = \widehat{CBD} = \widehat{CAD}, \gamma = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ e } \delta = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ (cf. Figura 3.7).}$$

Pelo resultado basilar, tem-se que

$$\overline{AB} = \text{sen } \alpha, \overline{BC} = \text{sen } \delta, \overline{CD} = \text{sen } \beta, \overline{AD} = \text{sen } \gamma \text{ e}$$

$$\overline{BD} = \text{sen } (\beta + \delta) = \text{sen } (\alpha + \gamma)$$

$$\overline{AC} = \text{sen } (\alpha + \delta) = \text{sen } (\beta + \gamma).$$

Do Teorema de Ptolomeu resulta que

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}$$

pelo que

$$\text{sen}(\alpha + \gamma) \text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen } \alpha \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma \text{sen } \delta.$$

Como consequência é possível enunciar a seguinte propriedade:

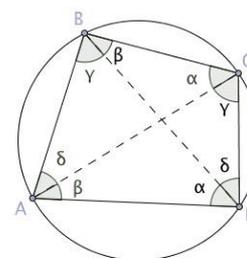


Figura 3.7 - Quadrilátero cíclico inscrito numa circunferência

**IDENTIDADE DE PTOLOMEU.** Se  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$  então

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma).$$

Como se acabou de mostrar, o Teorema de Ptolomeu implica a Identidade de Ptolomeu. Vejamos, agora, que a Identidade de Ptolomeu implica a implicação direta do Teorema de Ptolomeu.

Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ângulos tais que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ .

Tem-se que  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$ .

Considere-se uma circunferência de diâmetro 1 dividida em arcos de amplitude  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  e  $2\delta$ , tal como sugere a figura (cf. *Figura 3.8*).

Considere-se um quadrilátero [ABCD] cíclico (cf. *Figura 3.9*) tal que

$$\alpha = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} \quad \beta = \widehat{CBD} = \widehat{DAC}$$

$$\gamma = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} \quad \delta = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}.$$

Pela Identidade de Ptolomeu, tem-se que

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma).$$

Pelo resultado basilar,

$$\overline{AB} = \operatorname{sen} \alpha, \overline{BC} = \operatorname{sen} \delta, \overline{CD} = \operatorname{sen} \beta, \overline{AD} = \operatorname{sen} \gamma \text{ e}$$

$$\overline{BD} = \operatorname{sen}(\beta + \delta) = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma)$$

$$\overline{AC} = \operatorname{sen}(\alpha + \delta) = \operatorname{sen}(\beta + \gamma).$$

Donde,

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{BD} \times \overline{AC}. \quad \blacksquare$$

Ficou, assim, demonstrada a equivalência entre a implicação direta do Teorema de Ptolomeu e a Identidade de Ptolomeu. Vejamos, agora, a equivalência entre a Identidade de Ptolomeu e as fórmulas da adição do seno e do cosseno.

### Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) Dados  $\alpha$  e  $\gamma$  ângulos agudos, considerem-se  $\delta$  e  $\beta$  tais que  $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 90^\circ$ .

Tem-se

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ, \text{ logo pela Identidade de Ptolomeu}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \delta).$$

$$\text{Como } \beta + \gamma = 90^\circ \text{ então } \operatorname{sen}(\beta + \gamma) = 1. \quad (1)$$

$$\text{Como } \alpha + \delta = 90^\circ \text{ então } \operatorname{sen} \delta = \cos \alpha. \quad (2)$$

$$\text{Como } \beta + \gamma = 90^\circ \text{ então } \operatorname{sen} \beta = \cos \gamma. \quad (3)$$

De (1), de (2) e de (3) tem-se

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma). \quad \blacksquare$$

( $\Leftarrow$ ) Considerem-se as fórmulas da adição e da subtração do cosseno:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, tem-se que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

$$\text{Pelo que } \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (1)$$

De (1) tem-se que

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] + \frac{1}{2} [\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)].$$

Considerando  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$  então  $\cos(\gamma + \delta) = -\cos(\alpha + \beta)$  pelo que

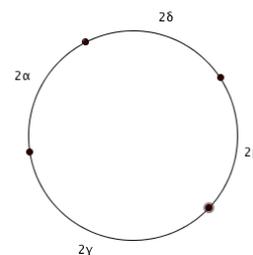


Figura 3.8 - Circunferência

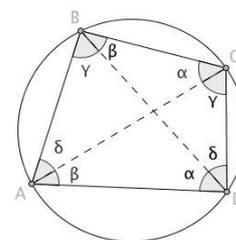


Figura 3.9 - QC

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] + \frac{1}{2} [\cos(\gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta)]. \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) tem-se, ainda, que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \gamma - (\beta + \gamma)) - \cos(\alpha + \gamma + (\beta + \gamma))] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \gamma - \beta - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma + \beta + \gamma)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Como  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$  então

$$\alpha + \beta + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \gamma - \delta = 180^\circ + \gamma - \delta.$$

De (3) tem-se

$$\operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(180^\circ + \gamma - \delta)] = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta)] \quad (4)$$

De (2) e (4) tem-se

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \operatorname{sen}(\beta + \gamma). \quad \blacksquare$$

Fica assim, demonstrada a equivalência entre a Identidade de Ptolomeu e a fórmula da soma do seno de dois ângulos e, conseqüentemente a equivalência entre o Teorema de Ptolomeu e a fórmula da adição do seno.

Em anexo, apresentamos uma demonstração alternativa da fórmula do seno da soma e da subtração de dois ângulos, que tem por base o Teorema de Ptolomeu (cf. *Anexo II.4*). ■■■■■

### 3.2. FÓRMULAS DO DOBRO DO ÂNGULO (ou fórmulas da duplicação)

Na secção anterior apresentámos as fórmulas do seno, do cosseno, e da tangente da soma e da diferença de dois ângulos. Um caso particular das fórmulas da adição do seno e do cosseno de dois ângulos é o caso em que os dois ângulos têm a mesma amplitude. Nesta situação, as expressões  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$  e  $\cos(\alpha + \beta)$  ficam reduzidas a  $\operatorname{sen}(2\alpha)$  e a  $\cos(2\alpha)$ , o que corresponde a determinar as razões trigonométricas do dobro de um dado ângulo. Vejamos o que acontece às identidades trigonométricas:

Sabe-se que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \text{ e}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Considerando  $\alpha = \beta$ , obtém-se

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

**TEOREMA 3.5** Considere-se um ângulo  $\alpha$ . Então

[A]  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$

[B]  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha.$

[C]  $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$  se  $\alpha \neq 90^\circ + k180^\circ \wedge \alpha \neq 45^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**OBSERVAÇÃO.** Recorrendo à Fórmula Fundamental da Trigonometria,  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , constatamos que é possível escrever  $\cos(2\alpha)$  apenas em função de  $\operatorname{sen} \alpha$  ou de  $\cos \alpha$ . Tem-se que:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \text{ e}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

E o que acontece com  $\text{sen}(3\alpha)$ ? Recorrendo à fórmula da adição do seno obtém-se  $\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen}(2\alpha)\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos(2\alpha)$ .

Sabe-se que  $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$  e  $\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$  pelo que

$$\begin{aligned}\text{sen}(3\alpha) &= 2\text{sen}\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha(1 - 2\text{sen}^2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos^2\alpha + \text{sen}\alpha(1 - 2\text{sen}^2\alpha) = \\ &= 2\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha) + \text{sen}\alpha(1 - 2\text{sen}^2\alpha) = 2\text{sen}\alpha - 2\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\alpha - 2\text{sen}^3\alpha = \\ &= 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha.\end{aligned}$$

Constatamos, assim, que  $\text{sen}(3\alpha)$  se expressa como um polinómio apenas da razão trigonométrica  $\text{sen}\alpha$ , o que não acontece com  $\text{sen}(2\alpha)$ . No caso,  $\text{sen}(4\alpha)$  tem-se que

$$\text{sen}(4\alpha) = 2\text{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) = 4\text{sen}\alpha\cos\alpha(1 - 2\text{sen}^2\alpha) = 4\text{sen}\alpha\cos\alpha - 8\text{sen}^3\alpha\cos\alpha.$$

À semelhança de  $\text{sen}(2\alpha)$ , o  $\text{sen}(4\alpha)$  não pode ser escrito através de uma expressão polinomial apenas dependente de  $\text{sen}\alpha$ .

Mais à frente, voltaremos a analisar com um pouco mais de detalhe as expressões correspondentes a ângulos múltiplos de um dado ângulo (cf. *Secção 3.5*).

Retomemos a identidade trigonométrica  $\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$ .

Recorrendo às fórmulas da tangente da soma de dois ângulos, aplicando um processo de recorrência, obtém-se as identidades trigonométricas relativas à tangente de ângulos múltiplos de  $\alpha$  em função de  $\text{tg}\alpha$ . Por exemplo, tem-se que

$$\begin{aligned}\text{tg}(3\alpha) = \text{tg}(\alpha + 2\alpha) &= \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}(2\alpha)}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}(2\alpha)} = \frac{\text{tg}\alpha + \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}} = \frac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1 - 3\text{tg}^2\alpha} \\ \text{tg}(4\alpha) = \text{tg}(\alpha + 3\alpha) &= \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}(3\alpha)}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}(3\alpha)} = \frac{\text{tg}\alpha + \frac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \frac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}} = \frac{4\text{tg}\alpha - 4\text{tg}^3\alpha}{1 - 6\text{tg}^2\alpha + 1\text{tg}^4\alpha}\end{aligned}$$

Por recorrência, obtém-se a identidade trigonométrica relativa a  $\text{tg}(n\alpha)$ , fazendo

$$\text{tg}(n\alpha) = \text{tg}(\alpha + (n-1)\alpha), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe-se que a expressão  $\text{tg}(n\alpha)$  é uma função racional que se consegue expressar apenas em função de  $\text{tg}\alpha$ .

### 3.3. FÓRMULAS DA METADE DE UM ÂNGULO (ou fórmulas da biseção)

E como obter fórmulas para o seno e o cosseno da metade de um ângulo conhecidas as razões trigonométricas desse mesmo ângulo?

Retomemos as identidades trigonométricas

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\alpha \quad \text{e} \quad \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\alpha &\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \\ \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 &\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo nas fórmulas anteriores  $\alpha$  por  $\frac{\alpha}{2}$  obtém-se as **Fórmulas de Briggs**<sup>18</sup>:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

e, conseqüentemente,  $\text{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ .

Das Fórmulas de Briggs resulta o seguinte teorema:

---

<sup>18</sup> **Henry Briggs** (1561 - 1630), matemático inglês a quem se deve a construção da primeira tábua de logaritmos decimais.

**TEOREMA 3.6** Considere-se um ângulo  $\alpha$ . Então

$$[\text{A}] \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}$$

$$[\text{B}] \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$$

$$[\text{C}] \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \text{ com } \alpha \neq 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Apresentamos, agora, a demonstração geométrica do teorema no caso em que  $\alpha$  é um ângulo agudo.

**Demonstração.** Considere-se uma circunferência de raio 1 centrada no vértice  $O$  do ângulo  $\alpha$  e o ângulo  $\beta$  de vértice  $P$ , inscrito na circunferência, com um dos lados contendo um dos lados do ângulo  $\alpha$  e compreendendo entre os seus lados o mesmo arco de circunferência que o ângulo  $\alpha$  (cf. *Figura 3.10*).

Seja  $Q$  o ponto de interseção da circunferência com os lados não colineares dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Considere-se, ainda, a projeção ortogonal,  $R$ , do ponto  $Q$  na reta  $PO$  e a projeção ortogonal,  $S$ , do ponto  $O$  na reta  $PQ$ .

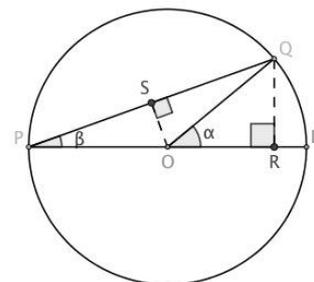


Figura 3.10 –  
Circunferência de raio 1

Como a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco correspondente, tem-se que  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ .

Tem-se que  $\overline{sen \alpha} = \overline{QR}$  e  $\overline{cos \alpha} = \overline{OR}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras, ao triângulo  $[PQR]$  obtém-se

$$\overline{PQ}^2 = \overline{sen}^2 \alpha + (1 + \overline{cos \alpha})^2 = \overline{sen}^2 \alpha + 1 + 2 \overline{cos \alpha} + \overline{cos}^2 \alpha = 2 + 2 \overline{cos \alpha}.$$

Como  $\overline{PQ} > 0$  então  $\overline{PQ} = \sqrt{2 + 2 \overline{cos \alpha}}$ .

Do triângulo  $[OPS]$  resulta que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{OS}}{\overline{PO}} = \overline{OS} \text{ e } \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{PS}}{\overline{PO}} = \overline{PS}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $[OPS]$  (observe-se que  $\overline{PS} = \frac{1}{2} \overline{PQ}$ ) obtém-se

$$\overline{OS}^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2+2 \overline{cos \alpha}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+2 \overline{cos \alpha}}{4} = \frac{1-\overline{cos \alpha}}{2}. \text{ Como } \overline{OS} > 0 \text{ então } \overline{OS} = \sqrt{\frac{1-\overline{cos \alpha}}{2}}.$$

$$\text{Assim, } \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\overline{cos \alpha}}{2}} \text{ e } \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+2 \overline{cos \alpha}}}{2} = \sqrt{\frac{2+2 \overline{cos \alpha}}{4}} = \sqrt{\frac{1+\overline{cos \alpha}}{2}}$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\overline{cos \alpha}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\overline{cos \alpha}}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\overline{cos \alpha}}{1+\overline{cos \alpha}}}. \quad \blacksquare$$

A título de exemplo, mostramos como obter os valores para as razões trigonométricas dos ângulos  $\frac{1}{2}45^\circ, \frac{1}{4}45^\circ, \frac{1}{8}45^\circ, \dots$ , a partir dos valores das razões trigonométricas de  $45^\circ$ , recorrendo às fórmulas da duplicação. Como  $\frac{45^\circ}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  está no primeiro quadrante tem-se para os ângulos envolvidos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\overline{cos \alpha}}{2}} \text{ e } \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\overline{cos \alpha}}{2}}.$$

Aplicando um processo de recorrência, obtém-se as seguintes identidades trigonométricas:

- se  $n = 1$  então

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(45^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(45^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

• se  $n = 2$  então

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{45^\circ}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

• se  $n = 3$  então

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{45^\circ}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{45^\circ}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{45^\circ}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Por recorrência obtém-se as identidades

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{2}, \text{ com } n+1 \text{ raízes quadradas e}$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{45^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}{2}, \text{ com } n+1 \text{ raízes quadradas.}$$

Uma vez estabelecidas as fórmulas para o seno e o cosseno da metade de um ângulo, é possível construir tabelas trigonométricas<sup>19</sup> a partir dos valores exatos de alguns ângulos já conhecidos.

Retomemos a fórmula  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$  válida para  $\alpha \neq 180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ . Podemos escrever  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{1+\cos\alpha}$ .

Tem-se que  $1 + \cos\alpha > 0$  para qualquer  $\alpha$  do domínio de validade da expressão. Se  $\alpha$  pertencer ao 1º ou 2º quadrante, então  $\frac{\alpha}{2}$  pertence ao 1º quadrante. Logo,  $\operatorname{sen}\alpha > 0$  e  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ . No caso do ângulo pertencer ao 3º ou 4º quadrante,  $\frac{\alpha}{2}$  pertence ao 2º quadrante. Pelo que  $\operatorname{sen}\alpha < 0$  e  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ . Em ambos os casos, o sinal de  $\operatorname{sen}\alpha$  é igual ao sinal de  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

Logo a identidade  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{1+\cos\alpha}$  pode ser escrita na forma  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ . Ou, ainda, multiplicando o numerador e o denominador por  $1 - \cos\alpha$ , no caso em que  $\alpha \neq k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ,

<sup>19</sup> As fórmulas da adição e da metade de um ângulo permitiram, desde a antiguidade a construção de tabelas trigonométricas com precisão suficiente para as inúmeras aplicações em que desde então se utilizou a trigonometria, nomeadamente, a astronomia e a cartografia. (cf. *Anexo VI\_ Estórias que a história nos conta*).

tem-se

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha(1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha(1 - \cos \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Observe-se que a expressão  $\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$  não é válida em todo o domínio da  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Tem-se que a primeira expressão é válida para  $\alpha \neq k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$  e a segunda expressão é válida para  $\alpha \neq 180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

As identidades seguintes exprimem racionalmente  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  em função de  $\operatorname{sen} \alpha$  e de  $\cos \alpha$ :

**TEOREMA 3.7** Considere-se um ângulo  $\alpha$ . Então

[A]  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$  com  $\alpha \neq 180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

[B]  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$  com  $\alpha \neq k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

Vejamos, agora, se é possível escrever  $\operatorname{sen} \alpha$  e  $\cos \alpha$  em função de  $tg\frac{\alpha}{2}$ . Se  $\cos \beta \neq 0$  temos que

$$\operatorname{sen}(2\beta) = 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta}{\cos \beta} = 2 \operatorname{tg} \beta \cos^2 \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = \left(\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} - \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta}\right) \cos^2 \beta = (1 - \operatorname{tg}^2 \beta) \cos^2 \beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Fazendo  $2\beta = \alpha$  obtém-se os seguintes resultados:

**TEOREMA 3.8** Considere-se um ângulo  $\alpha$  com  $\alpha \neq 180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ . Então

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Verifica-se assim, pelas fórmulas anteriores, que quando conhecida a  $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , ficam determinadas as razões trigonométricas do respetivo ângulo  $\alpha$ . Vamos designar estas identidades por **uniformização das razões trigonométricas**.

### ■■■■ ENCANTO 3... UM ENCONTRO INESPERADO

Ao longo do tempo surgiu a necessidade de explorar a Trigonometria para resolver problemas relacionados com a Astronomia, com a Navegação, com a Arquitetura, entre muitas outras áreas. Nessa busca desenfreada pela compreensão do Universo, a Trigonometria foi uma importante ferramenta nas mãos dos babilónios, egípcios, gregos, hindus e árabes.

Ao longo do tempo, foram encontradas inúmeras tábuas de argila cuja principal função era auxiliar nas medições e nos resultados dos cálculos efetuados.

De entre todas as tábuas, talvez a mais importante ou a mais conhecida seja a carismática *Tabela Plimpton 322* (cf. *Figura 3.11*). A Plimpton 322 é uma tábua de argila, parcialmente partida, em escrita cuneiforme, que apresenta registos de atividade matemática babilónica. Esta tábua foi escrita aproximadamente entre 1900 a 1600 a.C. Inicialmente, parecia tratar-se de uma tábua como tantas outras, com registo de



Figura 3.11 – Plimpton 322 (retirado de *Trigonometric Delights* [8])

atividades comerciais, no entanto, uma análise cuidada do tipo de sistema numérico e símbolos utilizados na época permitiu a tradução do conteúdo para sistemas mais atuais (o sexagesimal e o decimal) e revelou algo bem diferente.

A *Plimpton 322* é uma tabela com 4 colunas, sendo que nas primeiras 3 colunas, praticamente completas, estão indicados os valores dos catetos e hipotenusa de triângulos retângulos inteiros. Acredita-se que a tabela apresenta uma lista de ternos pitagóricos.

Encontrar triângulos retângulos cujas medidas dos comprimentos dos lados são números inteiros, definidos por alguns autores como os *nossos melhores amigos*, é uma busca antiga. Chamamos **terno pitagórico** a um terno de inteiros positivos,  $(a, b, c)$ , tal que  $a^2 + b^2 = c^2$ . O terno pitagórico mais notável é o  $(3,4,5)$  pois é o único formado por três números consecutivos, sendo, nesse terno, a soma dos elementos a menor possível. Mas existem outros igualmente notáveis, por exemplo, o terno correspondente a um triângulo de lados 372, 925 e 997. Este terno corresponde ao triângulo retângulo de maior perímetro cujas medidas dos comprimentos dos lados são inferiores 1000. A questão que se coloca é: Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?

Um resultado surpreendente esconde-se por trás da uniformização das razões trigonométricas. De que forma se estabelece uma relação entre os ternos pitagóricos e a *uniformização*? De que forma se relacionam as igualdades estudadas anteriormente com os ternos pitagóricos?

Seja  $(a, b, c)$  um terno Pitagórico. Existe, então, um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos são  $a$  e  $b$  e cujo comprimento da hipotenusa é  $c$ . Pelo que cada ângulo agudo do triângulo tem razões trigonométricas racionais.

Considerem-se as identidades

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (2).$$

Se  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  é um número racional não negativo, isto é,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{q}$  com  $p, q \in \mathbb{N}$ , então substituindo em (1) e em (2) obtemos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2} = \frac{2pq}{q^2 + p^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}.$$

Logo podemos tomar para as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo com um ângulo agudo  $\alpha$  os números racionais da forma  $2pq$ ,  $q^2 - p^2$  e  $q^2 + p^2$  (hipotenusa), obtendo-se o terno pitagórico  $(2pq, q^2 - p^2, q^2 + p^2)$ . Na tabela ao lado (cf. *Tabela 3.3*) encontram-se registados alguns ternos pitagóricos da forma

$$(a, b, c) = (2pq, q^2 - p^2, q^2 + p^2).$$

A título de exemplo, vamos determinar as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo com um ângulo agudo  $\alpha$  sendo  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{5}$ . Escolhendo  $p = 3$  e  $q = 5$  conclui-se que as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo são 16, 30 e 34.

Tabela 3.3 – Ternos Pitagóricos

CATETO	CATETO	HIPOTENUSA
a	b	c
3	4	5
65	72	97
119	120	169
140	171	221
161	240	289
319	360	481
481	600	769
799	960	1249
1679	2400	2929
1771	2400	2929



### 3.4. FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO LOGARÍTMICA (ou fórmulas de prostaférese)

Nesta secção apresentamos identidades trigonométricas que são designadas por **fórmulas de transformação logarítmica** pois *transformam* somas em produtos. A designação de logarítmica deve-

se à semelhança de comportamento que se verifica com os logaritmos, relativamente à propriedade seguinte  $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \times b)$  com  $b, c \in \mathbb{R}^+$  e  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .

Vejamos como a adição e diferença entre senos ou cossenos pode ser transformada numa expressão logarítmica.

**TEOREMA 3.9** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Então

$$[A] \quad \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$[B] \quad \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$[C] \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

$$[D] \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Apresentamos apenas a demonstração das identidades trigonométricas [A] e [B] dado que as restantes se demonstram de forma análoga.

**Demonstração.** Considere-se  $a = \alpha + \beta$  e  $b = \alpha - \beta$ . Tem-se que  $\alpha = \frac{a+b}{2}$  e  $\beta = \frac{a-b}{2}$ . (1)

Pelas fórmulas do seno da soma e da diferença de dois ângulos, tem-se que  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$  e  $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$ .

De (1) obtém-se

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{a-b}{2} \right) \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \quad (2)$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{a-b}{2} \right) \cos \left( \frac{a+b}{2} \right). \quad (3)$$

Adicionando as equações (2) e (3) membro a membro obtém-se

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\text{e subtraindo obtém-se } \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{a-b}{2} \right) \cos \left( \frac{a+b}{2} \right). \quad \blacksquare$$

Apresentamos, de seguida, as identidades trigonométricas que permitem transformar um produto de senos e/ou cossenos na soma de senos ou cossenos de dois ângulos.

**TEOREMA 3.10.** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Então

$$[A] \quad \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

$$[B] \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

$$[C] \quad \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

**Demonstração de [A] e [B].** Sabe-se que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (1) \quad \text{e} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (2).$$

Subtraindo (1) e (2) termo a termo, obtém-se

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Adicionando (1) e (2) termo a termo, obtém-se

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

[C] Sabe-se que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \quad (3) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha. \quad (4)$$

Adicionando (3) e (4) termo a termo, obtém-se

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad \blacksquare$$

### 3.5. FÓRMULAS DE ÂNGULOS MÚLTIPLOS

Numa secção anterior provou-se que se consegue expressar  $\text{sen}(3\alpha)$  como um polinómio de razão trigonométrica  $\text{sen } \alpha$ , o que não acontece com  $\text{sen}(2\alpha)$ . Verificou-se, ainda, que  $\text{sen}(4\alpha) = 4 \text{sen } \alpha \cos \alpha - 8 \text{sen}^3 \alpha \cos \alpha$ , pelo que se concluiu que a mesma não pode ser escrita através de uma expressão polinomial apenas dependente de  $\text{sen } \alpha$ .

Como obter o polinómio relativo a  $\text{sen}(5\alpha)$ ? Aplicando a fórmula do seno da adição tem-se  $\text{sen}(5\alpha) = \text{sen}(\alpha + 4\alpha) = \text{sen } \alpha \cos(4\alpha) + \text{sen}(4\alpha) \cos \alpha$ . (1)

Como  $\text{sen}(4\alpha) = 4 \text{sen } \alpha \cos \alpha - 8 \text{sen}^3 \alpha \cos \alpha$  e  $\cos(4\alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$  substituindo em (1) obtém-se  $\text{sen}(5\alpha) = 5 \text{sen } \alpha - 20 \text{sen}^3 \alpha + 16 \text{sen}^5 \alpha$ .

Observe-se que  $\text{sen}(5\alpha)$  é uma expressão dependente de  $\text{sen}(4\alpha)$  e de  $\cos(4\alpha)$ , o que significa que não se obtém por recorrência apenas a partir dos  $\text{sen}(k\alpha)$  com  $k < 5$ .

De um modo geral, recorrendo à fórmula do seno da adição tem-se que  $\text{sen}(n\alpha) = \text{sen}(\alpha + (n-1)\alpha) = \text{sen } \alpha \cos((n-1)\alpha) + \text{sen}((n-1)\alpha) \cos \alpha$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  pelo que as expressões  $\text{sen}(k\alpha)$  e  $\cos(k\alpha)$  com  $k < n$ , têm de ser desenvolvidas a par:  $\text{sen}(2\alpha)$  e  $\cos(2\alpha)$ ,  $\text{sen}(3\alpha)$  e  $\cos(3\alpha)$ , ...,  $\text{sen}((n-1)\alpha)$  e  $\cos((n-1)\alpha)$ .

Aplicando um processo por recorrência e recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{sen}(2\alpha) &= 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha \\ \text{sen}(3\alpha) &= 3 \text{sen } \alpha - 4 \text{sen}^3 \alpha \\ \text{sen}(4\alpha) &= 4 \cos \alpha (\text{sen } \alpha - 2 \text{sen}^3 \alpha) \\ \text{sen}(5\alpha) &= 5 \text{sen } \alpha - 20 \text{sen}^3 \alpha + 16 \text{sen}^5 \alpha \\ &\vdots \end{aligned}$$

Constata-se da análise das expressões que, quando  $n$  é ímpar, a expressão  $\text{sen}(n\alpha)$  pode ser escrita como uma expressão polinomial dependente apenas de  $\text{sen } \alpha$  e, quando  $n$  é par, escreve-se como uma expressão polinomial em função de  $\text{sen } \alpha$  e  $\cos \alpha$ .

De forma análoga, recorrendo às relações conhecidas, aplicando um processo por recorrência, obtém-se a identidade relativa a  $\cos(n\alpha)$ , fazendo  $\cos(n\alpha) = \cos(\alpha + (n-1)\alpha)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e tem-se

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos(3\alpha) &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \cos(4\alpha) &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 \\ \cos(5\alpha) &= 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observa-se que a expressão  $\cos(n\alpha)$  pode ser sempre escrita como uma função polinomial dependente apenas de  $\cos \alpha$ , independentemente do valor de  $n$ .

Vejamos, mais pormenorizadamente, como surgem os coeficientes associados a uma expressão trigonométrica  $\text{sen}(n\alpha)$  e  $\cos(n\alpha)$ . Começamos por apresentar dois resultados auxiliares.

#### TEOREMA DE DE MOIVRE<sup>20</sup>.

$$(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \text{sen}(n\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

No teorema seguinte apresentamos uma fórmula designada por **Binómio de Newton** que nos dá uma fórmula para expressões do tipo  $(a + b)^n$  com  $n \in \mathbb{N}_0$ .

<sup>20</sup> **Braham de De Moivre** (1667-1754), matemático francês que se notabilizou nas áreas da Geometria Analítica, na Trigonometria e na Teoria das Probabilidades. De Moivre estudou lógica e deu importantes contributos na teoria dos números complexos, no estudo das probabilidades e na trigonometria. Apresentou, em 1739, um processo de determinação das raízes de índice  $n$  de um qualquer número complexo.

### BINÓMIO DE NEWTON<sup>21</sup>.

O desenvolvimento da  $n$ -ésima potência de  $(a + b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$  é dado por:

$$(a + b)^n = {}^n C_0 a^n b^0 + {}^n C_1 a^{n-1} b^1 + \dots + {}^n C_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}^n C_n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n {}^n C_k a^k b^{n-k}.$$

Os números  ${}^n C_k$  são designados por **coeficientes binomiais** e  ${}^n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Recorrendo a estes resultados, vejamos como é possível obter as identidades relativas a  $\text{sen}(3\alpha)$  e  $\text{cos}(3\alpha)$ . Aplicando o teorema de De Moivre tem-se

$$(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i \text{sen}(3\alpha). \quad (1)$$

Por outro lado, aplicando o Binómio de Newton obtém-se

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)^3 &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \text{sen } \alpha - 3 \cos \alpha \text{sen}^2 \alpha - i \text{sen}^3 \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \text{sen}^2 \alpha + i(3 \cos^2 \alpha \text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha). \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e de (2) e aplicando a Fórmula fundamental da trigonometria vem

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \text{sen}^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \text{sen}(3\alpha) &= 3 \cos^2 \alpha \text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha = 3(1 - \text{sen}^2 \alpha) \text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha = 3 \text{sen } \alpha - 4 \text{sen}^3 \alpha. \end{aligned}$$

No exemplo anterior determinaram-se as identidades relativas ao  $\text{sen}(3\alpha)$  e ao  $\text{cos}(3\alpha)$ . Vamos, agora, determinar as identidades trigonométricas relativas a  $\text{sen}(n\alpha)$  e  $\text{cos}(n\alpha)$  sendo  $\alpha$  um ângulo arbitrário.

Do Teorema de De Moivre sabe-se que  $(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \text{sen}(n\alpha)$ . Aplicando o Binómio de Newton no primeiro membro da equação, obtemos

$$(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)^n = \sum_{k=0}^n {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} (i \text{sen } \alpha)^k \text{ logo,}$$

$$\cos(n\alpha) = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^n {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} (i \text{sen } \alpha)^k \right) = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^n {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k \right)$$

$$\text{sen}(n\alpha) = \text{Im} \left( \sum_{k=0}^n {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} (i \text{sen } \alpha)^k \right) = \text{Im} \left( \sum_{k=0}^n {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k \right).$$

Assim sendo, para  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$\cos(n\alpha) + i \text{sen}(n\alpha) = \sum_{k \text{ par}} {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k + i \sum_{k \text{ ímpar}} {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k + {}^n C_0 (\cos \alpha)^n.$$

Ora  $i^k \in \mathbb{R}$ , se  $k$  é par ou  $k = 0$  e  $i^k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , se  $k$  é ímpar, logo

$$i \text{sen}(n\alpha) = i \sum_{k \text{ ímpar}} {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k$$

$$\cos(n\alpha) = \sum_{k \text{ par}} {}^n C_k (\cos \alpha)^{n-k} i^k (\text{sen } \alpha)^k + {}^n C_0 (\cos \alpha)^n.$$

1ª Situação: Se  $n$  é par. Então  $n = 2m$  com  $m \in \mathbb{N}$ . Pelo que

$$\begin{aligned} i \text{sen}(n\alpha) &= i \sum_{k=1}^m {}^n C_{2k-1} (\cos \alpha)^{n-(2k-1)} (-1)^{k+1} (\text{sen } \alpha)^{2k-1} = \\ &= {}^n C_1 (\cos \alpha)^{n-1} \text{sen } \alpha - {}^n C_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\text{sen } \alpha)^3 + \dots + (-1)^{m+1} {}^n C_{2m-1} (\cos \alpha)^{n-(2m-1)} (\text{sen } \alpha)^{2m-1} \quad \text{e} \\ \cos(n\alpha) &= \sum_{k=0}^m {}^n C_{2k} (\cos \alpha)^{n-2k} (-1)^k (\text{sen } \alpha)^{2k} = \\ &= {}^n C_0 (\cos \alpha)^n (\text{sen } \alpha)^0 - {}^n C_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\text{sen } \alpha)^2 + \dots + (-1)^m {}^n C_{2m} (\cos \alpha)^{n-2m} (\text{sen } \alpha)^{2m}. \end{aligned}$$

<sup>21</sup> **Isaac Newton** (1643-1727), matemático e físico inglês que se notabilizou pela descoberta da lei da gravitação universal, tendo dado um importante contributo no desenvolvimento do *cálculo infinitesimal*. A designação de *Binómio de Newton* atribuída à fórmula relativa ao desenvolvimento da  $n$ -ésima potência de  $(a + b)$  surge como homenagem por todo o trabalho desenvolvido neste âmbito.

Como  $n = 2m$  então  $2m - 1 = n - 1$  e  $m = \frac{n}{2}$ . Pelo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(n\alpha) &= {}^nC_1 (\cos \alpha)^{n-1} \operatorname{sen} \alpha - {}^nC_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\operatorname{sen} \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1} {}^nC_{n-1} (\cos \alpha) (\operatorname{sen} \alpha)^{n-1} \\ \operatorname{cos}(n\alpha) &= {}^nC_0 (\cos \alpha)^n (\operatorname{sen} \alpha)^0 - {}^nC_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\operatorname{sen} \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} {}^nC_n (\cos \alpha)^0 (\operatorname{sen} \alpha)^n \end{aligned}$$

2ª Situação: Se  $n$  é ímpar. Então  $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pelo que

$$\begin{aligned} i \operatorname{sen}(n\alpha) &= i \sum_{k=0}^m {}^nC_{2k+1} (\cos \alpha)^{n-(2k+1)} (-1)^k (\operatorname{sen} \alpha)^{2k+1} = \\ &= {}^nC_1 (\cos \alpha)^{n-1} \operatorname{sen} \alpha - {}^nC_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\operatorname{sen} \alpha)^3 + \dots + (-1)^m {}^nC_{2m+1} (\cos \alpha)^{n-(2m+1)} (\operatorname{sen} \alpha)^{2m+1} \text{ e} \\ \operatorname{cos}(n\alpha) &= \sum_{k=0}^m {}^nC_{2k} (\cos \alpha)^{n-2k} (-1)^k (\operatorname{sen} \alpha)^{2k} = \\ &= {}^nC_0 (\cos \alpha)^n (\operatorname{sen} \alpha)^0 - {}^nC_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\operatorname{sen} \alpha)^2 + \dots + (-1)^m {}^nC_{2m} (\cos \alpha)^{n-2m} (\operatorname{sen} \alpha)^{2m}. \end{aligned}$$

Como  $n = 2m + 1$  então  $2m = n - 1$  e  $m = \frac{n-1}{2}$ , pelo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(n\alpha) &= {}^nC_1 (\cos \alpha)^{n-1} \operatorname{sen} \alpha - {}^nC_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\operatorname{sen} \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^nC_n (\cos \alpha)^0 (\operatorname{sen} \alpha)^n \\ \operatorname{cos}(n\alpha) &= {}^nC_0 (\cos \alpha)^n (\operatorname{sen} \alpha)^0 - {}^nC_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\operatorname{sen} \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^nC_{n-1} (\cos \alpha) (\operatorname{sen} \alpha)^{n-1} \end{aligned}$$

Da análise das expressões obtidas, constata-se, no caso do seno, que se  $n$  for ímpar, todos os expoentes das potências de base  $\cos \alpha$  são pares, pelo que recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria as expressões podem ser escritas como funções polinomiais apenas dependentes de  $\operatorname{sen} \alpha$ . Donde resulta que  $\operatorname{sen}(n\alpha)$  pode ser expresso apenas como função polinomial de  $\operatorname{sen}(\alpha)$ . Se  $n$  for par, os expoentes das potências de base  $\cos \alpha$  são ímpares, pelo que a expressão obtida fica dependente de  $\cos \alpha$  e de  $\operatorname{sen} \alpha$ .

No caso do cosseno, tanto para  $n$  par como para  $n$  ímpar, os expoentes das potências de base  $\operatorname{sen} \alpha$  são pares, pelo que  $\operatorname{cos}(n\alpha)$  pode ser escrito como uma função polinomial apenas dependente de  $\cos \alpha$ .

Vejamos, a título de exemplo, como determinar  $\operatorname{sen}(36^\circ)$  a partir de alguns valores de referência, recorrendo a identidades trigonométricas relativas a ângulos múltiplos.

Sabe-se que  $5 \times 36^\circ = 180^\circ$  pelo que  $\operatorname{sen}(180^\circ) = \operatorname{sen}(5 \times 36^\circ)$ .

Sabe-se que a identidade trigonométrica  $\operatorname{sen}(5\theta) = 5 \operatorname{sen} \theta - 20 \operatorname{sen}^3 \theta + 16 \operatorname{sen}^5 \theta$  é válida para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ , em particular, para  $\theta = 36^\circ$ .

Substituindo na equação  $\theta$  por  $36^\circ$  tem-se

$$\operatorname{sen}(180^\circ) = 5 \operatorname{sen}(36^\circ) - 20 \operatorname{sen}^3(36^\circ) + 16 \operatorname{sen}^5(36^\circ).$$

Considere-se  $x = \operatorname{sen}(36^\circ)$  então obtém-se  $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$ .

Resolvendo a equação, tem-se

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{16}.$$

Como  $36^\circ \in 1^\circ Q$  tem-se  $\operatorname{sen}(36^\circ) > 0$ , logo a condição  $x = 0$  é impossível.

Como  $36^\circ < 45^\circ$  logo  $\operatorname{sen}(36^\circ) < \operatorname{sen}(45^\circ)$  o que é equivalente a  $\operatorname{sen}(36^\circ) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Logo

$$\operatorname{sen}(36^\circ) = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

**OBSERVAÇÃO.** No primeiro capítulo, recorrendo ao triângulo equilátero e ao quadrado, determinaram-se as RT dos ângulos  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $45^\circ$ . Os valores exatos das RT de  $36^\circ$  podem também ser determinados recorrendo a um polígono regular, o pentágono (cf. *Anexo II.5*).

#### ■■■■ ENCANTO 4... À DESCOBERTA DAS RAÍZES

Em 1593, Adriaan Van Roomen<sup>22</sup>, publicou um tratado que propunha entre outros um problema muito desafiante: resolver uma equação algébrica de grau 45, que escrita na notação atual, tem a seguinte forma:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740259x^{35} + 3764565x^{33} - 14945040x^{31} + 46955700x^{29} - 117679100x^{27} + 236030652x^{25} - 378658800x^{23} + 483841800x^{21} - 488494125x^{19} + 384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x^{13} - 34512075x^{11} + 7811375x^9 - 1138500x^7 + 95634x^5 - 3795x^3 + 45x = A, \text{ sendo}$$

$$A = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}$$

O embaixador da Holanda na corte do rei Henrique IV, rei de França, afirmou que a França não tinha nenhum matemático capaz de resolver o problema proposto por Roomen. Mas eis que surge François Viète! Apresentamos, de seguida, o modo como Viète, recorrendo a processos algébricos, determinou as soluções da equação de Van Roomen. 31

Considere-se  $A = 2 \operatorname{sen}(45\theta)$ .

Sabe-se que  $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha$  é válida para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Se  $\alpha = 15\theta$  obtém-se  $\operatorname{sen}(45\theta) = 3 \operatorname{sen}(15\theta) - 4 \operatorname{sen}^3(15\theta)$ .

Considere-se  $y = 2 \operatorname{sen}(15\theta)$  então

$$2 \operatorname{sen}(45\theta) = 3y - y^3 \Leftrightarrow A = 3y - y^3. \quad (1)$$

Se  $\alpha = 5\theta$  obtém-se  $\operatorname{sen}(15\theta) = 3 \operatorname{sen}(5\theta) - 4 \operatorname{sen}^3(5\theta)$ .

$$\text{Considere-se } z = 2 \operatorname{sen}(5\theta) \text{ então } 2 \operatorname{sen}(15\theta) = 3z - z^3 \Leftrightarrow y = 3z - z^3. \quad (2)$$

Sabe-se que

$$\operatorname{sen}(5\theta) = 5 \operatorname{sen} \theta - 20 \operatorname{sen}^3 \theta + 16 \operatorname{sen}^5 \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}^5 \theta = \frac{1}{16} \operatorname{sen}(5\theta) - \frac{5}{16} \operatorname{sen} \theta + \frac{5}{4} \operatorname{sen}^3 \theta.$$

$$\text{Considere-se } x = 2 \operatorname{sen} \theta \text{ então } \frac{1}{32} x^5 = \frac{1}{32} z - \frac{5}{32} x + \frac{5}{32} x^3 \Leftrightarrow x^5 - 5x^3 + 5x = z. \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) e (2) em (1) obtém-se

$$\begin{aligned} A &= 3y - y^3 = 3(3z - z^3) - (3z - z^3)^3 = \\ &= 3(3(x^5 - 5x^3 + 5x) - (x^5 - 5x^3 + 5x)^3) - (3(x^5 - 5x^3 + 5x) - (x^5 - 5x^3 + 5x)^3)^3 \\ &= x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \dots + 95634x^5 - 3795x^3 + 45x. \end{aligned}$$

Desta forma, Viète decompôs a equação inicial de grau 45 em três equações mais simples: duas de grau 3 e uma de grau 5. Observe-se que  $45 = 3 \times 3 \times 5$ .

As soluções da equação são:  $x_k = 2 \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2k\pi}{45}\right)$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 44\}$ . ■■■■

Vejamos, agora, o que acontece com as identidades trigonométricas **da tangente de ângulos múltiplos**. Recorrendo às fórmulas da tangente da soma de dois ângulos, aplicando um processo de recorrência, obtém-se as seguintes identidades trigonométricas relativas à tangente de ângulos múltiplos de  $\alpha$  em função de  $\operatorname{tg} \alpha$ :

<sup>22</sup> **Adriaan Van Roomen (1561 - 1615)**, professor de matemática e de medicina belga, publicou um trabalho intitulado *Idea Mathematicae*. Reconhecido pelo trabalho em questões da época: o cálculo do número  $\pi$ , quadratura do círculo,...

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg}(3\alpha) &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg}(4\alpha) &= \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \operatorname{tg}^4 \alpha} \end{aligned}$$

⋮

Por recorrência, obtém-se a identidade trigonométrica relativa a  $\operatorname{tg}(n\alpha)$ , fazendo

$$\operatorname{tg}(n\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + (n - 1)\alpha), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe-se que a  $\operatorname{tg}(n\alpha)$  pode obter-se por recorrência apenas a partir de  $\operatorname{tg}((n - 1)\alpha)$ .

### ■■■■ ENCANTO 5... UM CASAMENTO PERFEITO

Um dos padrões de números mais estudados e fascinantes da matemática é o Triângulo de Pascal<sup>23</sup>, cujas propriedades e aplicações têm encantado gerações de matemáticos. Como disse Martin Gardner<sup>24</sup>, “o padrão é tão simples que uma criança de 10 anos o consegue escrever, no entanto, contém tantas ligações com tantos aspectos aparentemente não relacionados com a Matemática, que é seguramente uma das mais elegantes construções Matemáticas”.

As identidades trigonométricas podem ser usadas para simplificar expressões envolvendo razões trigonométricas, como vimos anteriormente. Sabe-se que o Triângulo de Pascal é um arranjo triangular de coeficientes binomiais. Será possível *casar* estes dois elementos? De facto, é possível, e de uma forma totalmente inesperada.

Na tabela que se segue (cf. *Tabela 3.4*) exemplificam-se algumas das identidades trigonométrica relativas a  $\operatorname{tg}(n\alpha)$  e apresenta-se um **Triângulo de Pascal**<sup>25</sup> (ou Triângulo de Tartaglia).

Os valores de  $\operatorname{tg}(k\alpha)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , podem ser escritos como o quociente de soma de potências de  $\operatorname{tg} \alpha$  multiplicadas por números inteiros. Um olhar atento dessas fórmulas permite descobrir **padrões**.

Em primeiro lugar, é possível observar o comportamento dos expoentes das potências de  $\operatorname{tg} \alpha$ . No numerador, os expoentes são números ímpares consecutivos que aparecem de acordo com a seguinte sucessão

$$(1), (1), (1,3), (1,3), (1,3,5), (1,3,5), (1,3,5,7), \dots$$

e no denominador, observa-se a sucessão que se segue, envolvendo apenas números pares consecutivos e o zero

$$(0), (0,2), (0,2), (0,2,4), (0,2,4), (0,2,4,6), (0,2,4,6), (0,2,4,6,8), \dots$$

Relativamente ao sinal dos coeficientes das potências, constata-se que no numerador e no denominador há uma alternância de “+” e “-”, sendo o primeiro coeficiente sempre positivo. E os coeficientes, que padrão escondem? Observe-se a fórmula da  $\operatorname{tg}(7\alpha)$ ,

$$\operatorname{tg}(7\alpha) = \frac{7 \operatorname{tg} \alpha - 35 \operatorname{tg}^3 \alpha + 21 \operatorname{tg}^5 \alpha - 1 \operatorname{tg}^7 \alpha}{1 - 21 \operatorname{tg}^2 \alpha + 35 \operatorname{tg}^4 \alpha - 7 \operatorname{tg}^6 \alpha}$$

Seguindo o padrão “em zigue-zague” indicado pelas setas (começando no denominador), surge a seguinte sequência de números: (1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1), que corresponde exatamente à 7ª linha do Triângulo de Pascal ( $n = 7$ ). É fácil ver que o mesmo acontece com qualquer uma das outras identidades, seguindo o mesmo procedimento em “zigue-zague”.

<sup>23</sup> **Blaise Pascal** (1623 – 1662), físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês.

<sup>24</sup> **Martin Gardner** (1914 – 2010), matemático e escritor americano especializado em matemática recreativa. Tornou-se popular pela sua coluna de jogos matemáticos na revista *Scientific American*.

<sup>25</sup> O **Triângulo de Pascal** é um triângulo aritmético formado por números que se relacionam entre si. Muitas das relações numéricas que se podem obter foram descobertas por **Blaise Pascal** (1623 – 1662) e por **Tartaglia** (1500-1557).

Tabela 3.4 – Identidades trigonométricas  $tg(n\alpha)$  e Triângulo de Pascal

<b>n</b>	<b><math>tg(n\alpha)</math></b> em função de $tg \alpha$	<b>Triângulo de Pascal</b> (Primeiras oito linhas)
		1
<b>1</b>	$tg \alpha = \frac{1 tg \alpha}{1}$	1 1
<b>2</b>	$tg(2\alpha) = \frac{2 tg \alpha}{1 - 1 tg^2 \alpha}$	1 2 1
<b>3</b>	$tg(3\alpha) = \frac{3 tg \alpha - 1 tg^3 \alpha}{1 - 3 tg^2 \alpha}$	1 3 3 1
<b>4</b>	$tg(4\alpha) = \frac{4 tg \alpha - 4 tg^3 \alpha}{1 - 6 tg^2 \alpha + 1 tg^4 \alpha}$	1 4 6 4 1
<b>5</b>	$tg(5\alpha) = \frac{5 tg \alpha - 10 tg^3 \alpha + 1 tg^5 \alpha}{1 - 10 tg^2 \alpha + 5 tg^4 \alpha}$	1 5 10 10 5 1
<b>6</b>	$tg(6\alpha) = \frac{6 tg \alpha - 20 tg^3 \alpha + 6 tg^5 \alpha}{1 - 15 tg^2 \alpha + 15 tg^4 \alpha - 1 tg^6 \alpha}$	1 6 15 20 15 6 1
<b>7</b>	$tg(7\alpha) = \frac{7 tg \alpha - 35 tg^3 \alpha + 21 tg^5 \alpha - 1 tg^7 \alpha}{1 - 21 tg^2 \alpha + 35 tg^4 \alpha - 7 tg^6 \alpha}$	1 7 21 35 35 21 7 1

Porque será que isto acontece? Como surgem os coeficientes associados à expressão trigonométrica  $tg(n\alpha)$ ?

Sabe-se que se  $n$  é **par** então

$$\sin(n\alpha) = {}^n C_1 (\cos \alpha)^{n-1} \sin \alpha - {}^n C_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\sin \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1} {}^n C_{n-1} (\cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-1}$$

$$\cos(n\alpha) = {}^n C_0 (\cos \alpha)^n (\sin \alpha)^0 - {}^n C_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\sin \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} {}^n C_n (\cos \alpha)^0 (\sin \alpha)^n$$

pelo que

$$tg(n\alpha) = \frac{{}^n C_1 (\cos \alpha)^{n-1} (\sin \alpha) - {}^n C_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\sin \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1} {}^n C_{n-1} (\cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-1}}{{}^n C_0 (\cos \alpha)^n (\sin \alpha)^0 - {}^n C_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\sin \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} {}^n C_n (\cos \alpha)^0 (\sin \alpha)^n} \quad (1)$$

Se  $n$  é **ímpar** tem-se

$$\sin(n\alpha) = {}^n C_1 (\cos \alpha)^{n-1} \sin \alpha - {}^n C_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\sin \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_n (\cos \alpha)^0 (\sin \alpha)^n$$

$$\cos(n\alpha) = {}^n C_0 (\cos \alpha)^n (\sin \alpha)^0 - {}^n C_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\sin \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_{n-1} (\cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-1}$$

pelo que

$$tg(n\alpha) = \frac{{}^n C_1 (\cos \alpha)^{n-1} (\sin \alpha) - {}^n C_3 (\cos \alpha)^{n-3} (\sin \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_n (\cos \alpha)^0 (\sin \alpha)^n}{{}^n C_0 (\cos \alpha)^n (\sin \alpha)^0 - {}^n C_2 (\cos \alpha)^{n-2} (\sin \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_{n-1} (\cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-1}} \quad (2)$$

De (1) e de (2), dividindo, por  $(\cos \alpha)^n$ , o numerador e o denominador, obtém-se

se  $n$  for **par**,

$$tg(n\alpha) = \frac{{}^n C_1 tg \alpha - {}^n C_3 (tg \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1} {}^n C_{n-1} (tg \alpha)^{n-1}}{{}^n C_0 (tg \alpha)^0 - {}^n C_2 (tg \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} {}^n C_n (tg \alpha)^n}$$

e se  $n$  for **ímpar**,

$$tg(n\alpha) = \frac{{}^n C_1 tg \alpha - {}^n C_3 (tg \alpha)^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_n (tg \alpha)^n}{{}^n C_0 (tg \alpha)^0 - {}^n C_2 (tg \alpha)^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}^n C_{n-1} (tg \alpha)^{n-1}}$$

Constata-se, assim, que o “zigue-zague” termina no numerador se  $n$  é ímpar e no denominador se  $n$  é par (no caso de  $n$  ser par, o denominador tem mais uma parcela do que o numerador). Relativamente aos coeficientes, em ambos os casos, obtém-se a sequência

$${}^n C_0, {}^n C_1, {}^n C_2, \dots, {}^n C_{n-2}, {}^n C_{n-1}, {}^n C_n$$

em “zigue-zague” que corresponde à  $n$ -ésima linha do Triângulo de Pascal. ■ ■ ■ ■

## CAPÍTULO 4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo analisamos as chamadas **funções trigonométricas**, que pela sua periodicidade constituem ferramentas essenciais na construção de modelos que correspondem a fenómenos periódicos.

### 4.1. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Começemos por introduzir alguns resultados relativos à periodicidade de funções.

**DEFINIÇÃO 4.1** Dado um número real  $P > 0$ , uma função  $f$  designa-se por **periódica de período  $P$**  ou  **$P$ -periódica** se, para todo o  $x \in D_f$  e  $x + P \in D_f$ ,  $f(x + P) = f(x)$ .

Observe-se que se uma função é periódica de período  $P > 0$ , então também é periódica de período  $2P$ . Tem-se que, para todo o  $x$ ,  $x + P, x + 2P \in D_f$ ,  
 $f(x + 2P) = f((x + P) + P) = f(x + P) = f(x)$ .

De forma análoga, é possível mostrar que também  $3P, 4P, \dots, kP$ , com  $k \in \mathbb{N}$  são períodos de  $f$ . Desta análise resulta a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 4.2** Se uma função  $f$  for periódica de período  $P > 0$  e não houver nenhum número positivo  $P_0$  menor que  $P$  tal que a função seja periódica de período  $P_0$ , designa-se por  $P$  o **período positivo mínimo** ou **período fundamental** de  $f$ .

Apresentamos, em seguida, parte da representação gráfica de exemplos de funções periódicas (cf. *Figura 4.1*).

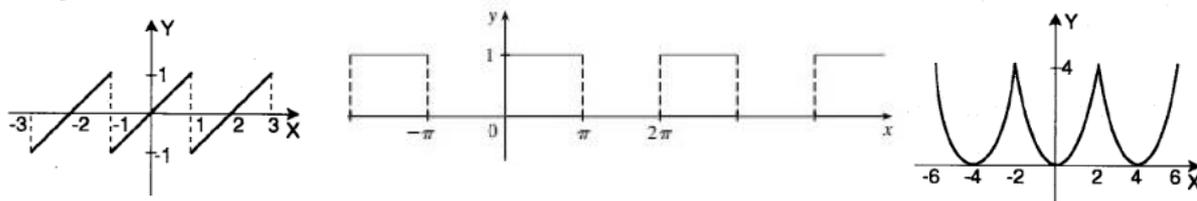


Figura 4.1 – Funções periódicas

Observa-se em todas as funções uma repetição dos valores da variável dependente em intervalos de igual amplitude da variável independente; no primeiro caso, a função repete-se a cada duas unidades, no segundo caso, de  $2\pi$  em  $2\pi$  unidades e no terceiro, a cada 4 unidades.

Existem inúmeros exemplos de funções periódicas, neste capítulo debruçamo-nos sobre um caso particular, as funções trigonométricas.

Em capítulos anteriores (cf. *Capítulo 2*), introduzimos uma nova medida de amplitude de ângulo, o radiano, que permitiu definir o seno, cosseno e tangente de qualquer número real. Vimos que, dado um  $x \in \mathbb{R}$  podemos identificar o seno de  $x$  (cosseno de  $x$  ou tangente de  $x$ ) como o seno (cosseno ou tangente) de um ângulo generalizado de amplitude  $x$ , em radianos. Donde resulta que a cada valor de  $x$  corresponde um e um só valor para seno de  $x$  (cosseno de  $x$  e tangente de  $x$ ), ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de amplitude dos ângulos (radianos) e o conjunto dos números reais. Podemos, assim, considerar as razões trigonométricas como funções reais de variável real. Estas funções designam-se por **funções trigonométricas**<sup>26</sup>.

Observe-se que as funções trigonométricas apresentam um carácter periódico dado que no círculo trigonométrico, todos os ângulos de amplitude  $x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , têm em comum os lados origem e extremidade. Tem-se que os valores das razões trigonométricas se repetem de  $2\pi$  em  $2\pi$ .

<sup>26</sup> Até Leonhard Euler (1707 - 1783) as razões trigonométricas eram consideradas essencialmente comprimentos de linhas ligadas a triângulos retângulos ou ao círculo trigonométrico. Euler foi o primeiro a considerar o seno, o cosseno, a tangente e as outras razões trigonométricas como funções.

Analisemos com um pouco mais de pormenor algumas propriedades das funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

#### 4.1.1. FUNÇÃO SENO

**DEFINIÇÃO 4.3** Designa-se por **função seno**, e representa-se abreviadamente por **sen** ou **sin**, a função real de variável real que a cada  $x \in \mathbb{R}$  faz corresponder o seno de um ângulo generalizado de amplitude igual a  $x$  radianos.

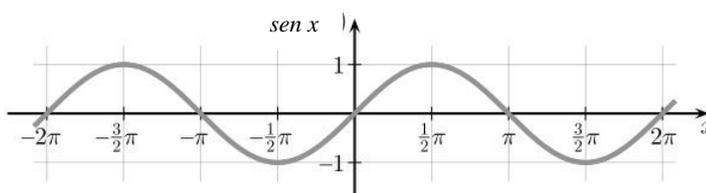


Figura 4.2 – Representação gráfica da função  $f(x) = \text{sen } x$

Na figura anterior, apresenta-se a representação gráfica da função  $y = \text{sen } x$  (cf. *Figura 4.2*). A curva correspondente à representação gráfica desta função é designada por **sinusoide**.

Da análise da representação gráfica e recorrendo ao círculo trigonométrico, resultam os seguintes teoremas relativos à função seno.

**TEOREMA 4.1** O **domínio** da função seno é  $\mathbb{R}$  e o **contradomínio** é  $[-1,1]$ .

**Demonstração.** O domínio da função seno é  $\mathbb{R}$ , dado que existe seno de qualquer ângulo generalizado de amplitude  $x$ , sendo  $x$  qualquer número real. Como vimos anteriormente (cf. *Capítulo 2*),  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ , para qualquer ângulo generalizado de amplitude  $x$  e para cada  $y \in [-1,1]$  existe  $x$  tal que  $y = \text{sen } x$  pelo que o contradomínio da função seno é  $[-1,1]$ . ■

**TEOREMA 4.2** O **período fundamental** da função seno é  $P = 2\pi$ .

Como já vimos,  $\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2\pi) = \text{sen } (\alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ . O que significa que de  $2\pi$  em  $2\pi$  os valores da função seno se repetem. Logo a função seno é  $2\pi$ -periódica.

**TEOREMA 4.3** Os **zeros** da função seno são os números  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,

$$\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Observe-se que os ângulos cujo seno é igual a zero têm o lado extremidade sobre o eixo  $Ox$ . Pelo que a função tem uma infinidade de zeros, por exemplo,  $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ .

**TEOREMA 4.4** A função seno admite **máximo** 1 nos pontos de abcissa  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e **mínimo**  $-1$  nos pontos de abcissa  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**OBSERVAÇÃO.** No círculo trigonométrico, os ângulos cujo seno é 1 têm o lado extremidade coincidente com o semieixo positivo  $Oy$ , pelo que  $\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Os ângulos cujo seno é  $-1$  têm o lado extremidade coincidente com o semieixo negativo  $Oy$ , pelo que

$$\text{sen } x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**TEOREMA 4.5** A função seno é ímpar, isto é,  $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Como vimos anteriormente, os senos de ângulos generalizados simétricos são simétricos, pelo que  $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ . ■

O gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do referencial.

### 4.1.2. FUNÇÃO COSSENO

**DEFINIÇÃO 4.4** Designa-se por **função cosseno**, e representa-se abreviadamente por **cos**, a função real de variável real que a cada  $x \in \mathbb{R}$  faz corresponder o cosseno de um ângulo generalizado de amplitude igual a  $x$  radianos.

A curva correspondente à representação gráfica da função cosseno é uma **sinusoide** com o mesmo formato de  $y = \text{sen } x$  embora desfasada segundo o eixo horizontal. Na figura seguinte apresenta-se a representação gráfica da função  $y = \cos x$  (cf. *Figura 4.3*).

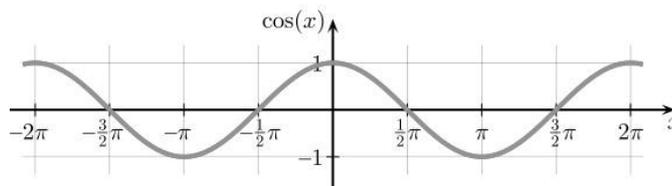


Figura 4.3 – Representação gráfica da função  $f(x) = \cos x$

**TEOREMA 4.6** O **domínio** da função cosseno é  $\mathbb{R}$  e o **contradomínio** é  $[-1,1]$ .

**Demonstração.** O domínio da função cosseno é  $\mathbb{R}$ , dado que existe cosseno de qualquer ângulo generalizado de amplitude  $x$ , sendo  $x$  qualquer número real. Como vimos anteriormente,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , para qualquer ângulo generalizado de amplitude  $x$  e para cada  $y \in [-1,1]$  existe  $x$  tal que  $y = \cos x$ , pelo que o contradomínio da função cosseno é  $[-1,1]$ . ■

À semelhança da função seno, também a função cosseno é uma função periódica e tem-se:

**TEOREMA 4.7** O **período fundamental** da função cosseno é  $P = 2\pi$ .

Como já vimos,  $\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi) = \cos (\alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

**TEOREMA 4.8** Os **zeros** da função cosseno são os números  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Relativamente aos zeros da função cosseno, observe-se que os ângulos cujo cosseno é igual a zero têm o lado extremidade sobre o eixo  $Oy$ . Pelo que a função tem uma infinidade de zeros, por exemplo,  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ .

Relativamente aos extremos, constata-se que:

**TEOREMA 4.9** A função cosseno admite **máximo 1** nos pontos de abcissa  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e **mínimo -1** nos pontos de abcissa  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**OBSERVAÇÃO.** No círculo trigonométrico, os ângulos cujo cosseno é 1 têm o lado extremidade coincidente com o semieixo positivo  $Ox$ , pelo que  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Os ângulos cujo cosseno é -1 têm o lado extremidade coincidente com o semieixo negativo  $Ox$ , pelo que  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**TEOREMA 4.10** A função cosseno é par, isto é,  $\cos (-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Como vimos anteriormente, os cossenos de ângulos generalizados simétricos são iguais, pelo que  $\cos (-x) = \cos x$ . ■

O gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo  $Oy$ .

### 4.1.3. FUNÇÃO TANGENTE

**DEFINIÇÃO 4.5** Designa-se por **função tangente**, e representa-se abreviadamente por **tg** ou **tan**, a função real de variável real que a cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  faz corresponder a tangente de um ângulo generalizado de amplitude igual a  $x$  radianos.

Na figura seguinte, apresenta-se a representação gráfica da função  $y = tg x$  (cf. *Figura 4.4*).

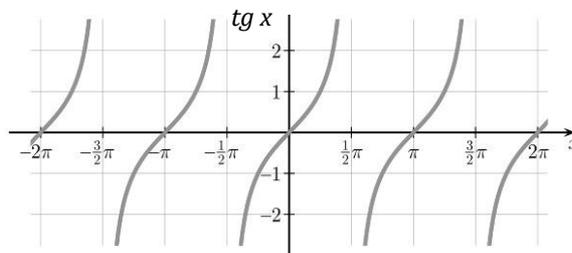


Figura 4.4 – Representação gráfica da função  $f(x) = tg x$

**TEOREMA 4.11** O **domínio** da função tangente é  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  e o **contradomínio** é  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração.** O domínio da função tangente é  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , dado que os ângulos que têm o lado extremidade no eixo  $Oy$  não têm tangente definida. Como vimos anteriormente,  $tg x$  pode assumir qualquer valor real. ■

Contrariamente ao que acontece com as funções seno e cosseno, a função tangente não tem máximo nem mínimo absolutos.

**TEOREMA 4.12** O **período fundamental** da função tangente é  $P = \pi$ .

Como já vimos,  $tg \alpha = tg (\alpha + \pi) = tg (\alpha + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

Observe-se que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas infinitas vezes, pelo que a função admite, no seu domínio, uma infinidade de zeros.

**TEOREMA 4.13** Os **zeros** da função tangente são os números  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ou seja,

$$tg x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Atendendo a que ângulos simétricos têm tangentes simétricas, tem-se que:

**TEOREMA 4.14** A função tangente é ímpar, isto é,  $tg (-x) = -tg x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

O gráfico da função tangente é simétrico em relação à origem do referencial.

### ■■■■ ENCANTO 6 ... SOB UM OLHAR TELESCÓPICO

O cálculo de áreas não levanta problemas quando associado a figuras planas delimitadas por linhas poligonais ou quando envolve, direta ou indiretamente, áreas de círculos. Mas como calcular a área de uma região do plano delimitada por uma curva genérica?

Neste encanto pretendemos determinar a área compreendida entre a curva da função seno e o eixo  $Ox$ , no intervalo  $[0, \pi]$  (cf. *Figura 4.5*). Vejamos como obter este surpreendente resultado recorrendo ao seno de ângulos múltiplos de um dado ângulo.

A figura ilustra uma região delimitada por uma curva que representa o gráfico da função seno no intervalo  $[0, \pi]$  e pelo eixo  $Ox$  (dito de um modo mais informal, a área abaixo do gráfico do seno), que designaremos por  $S$ . Pode-se tentar obter valor da área  $S$ , por aproximação, recorrendo a áreas de polígonos conhecidos. A título de exemplo, considere-se a área delimitada por dois polígonos: um retângulo  $[ABCD]$ , circunscrito a  $S$ , e um triângulo  $[ABE]$ , inscrito em  $S$ , como ilustra a figura (cf. *Figura 4.6*)

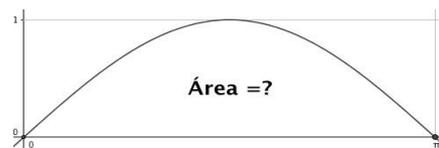


Figura 4.5 - Gráfico de  $\text{sen } x$  em  $[0, \pi]$

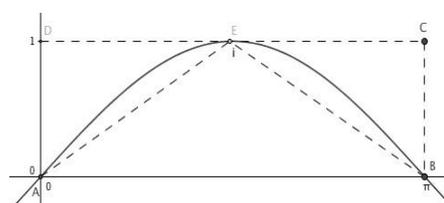


Figura 4.6 - Gráfico de  $\text{sen } x$  delimitado por um retângulo e um triângulo

No primeiro caso, a aproximação obtida para a área da região será maior que o seu valor exato e, no segundo caso, a respetiva aproximação será menor. Observe-se que a medida do comprimento da base dos dois polígonos é igual à medida da amplitude do intervalo onde a curva está definida e que a medida da altura é igual ao valor máximo da função.

Tem-se que

$$A_{[ABCD]} = \pi \times 1 = \pi \quad \text{e} \quad A_{[ABE]} = \frac{\pi \times 1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Donde se conclui que o valor exato da área de  $S$  está compreendido entre os dois valores obtidos, ou seja,  $\frac{\pi}{2} < S < \pi$ .

Mas esta não é concerteza a melhor limitação para o valor da área pretendida. Analisemos um outro processo de aproximação que tem por base o método utilizado por Arquimedes para determinar a área de um círculo<sup>27</sup> e que consiste em aproximar a região  $S$  utilizando retângulos incritos ou circunscritos à figura e, de seguida, calcular a soma das áreas desses retângulos (cf. *Figura 4.7*).

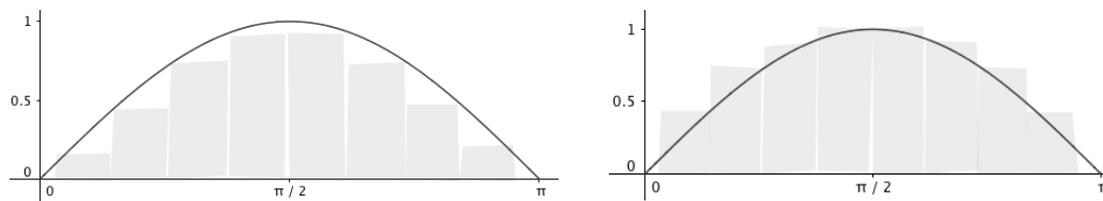


Figura 4.7 – Aproximações (por defeito e por excesso) da área  $S$

A figura pretende ilustrar aproximações (uma por defeito e outra por excesso) da área limitada pelo gráfico do seno e pelo eixo  $Ox$ . Observe-se que à medida que aumentamos o número de retângulos considerados, a soma das áreas converge para a área da figura desejada (aproxima-se cada vez mais da região pretendida). No caso dos retângulos serem circunscritos à região, a aproximação obtida para a área da região é maior que o seu valor exato, no caso dos retângulos inscritos, a respetiva aproximação é menor. Mais uma vez, o valor exato da área de  $S$  está compreendido entre os dois valores obtidos, como é óbvio.

Retomando o objetivo deste encanto, vamos escolher *estrategicamente* um conjunto de retângulos cuja soma se aproxima, *no limite*, da área da figura desejada.

<sup>27</sup> **Arquimedes** (287 a.C – 212 a.C), matemático, físico e astrónomo grego aplicou o **método da exaustão** para determinar a área de um círculo. Este método consiste em inscrever numa figura uma sequência de polígonos cuja soma das respetivas áreas converge para a área da figura desejada. Arquimedes dividiu o círculo em setores muito pequenos, de tal modo que se admita que cada um deles pudesse ser considerado um triângulo, donde resultou a igualdade entre a área do círculo e a soma das áreas desses triângulos.

Considere-se a divisão do intervalo de 0 a  $\pi$  em  $n$  partes iguais (cf. *Figura 4.8*) tais que

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}, x_n = \pi.$$

Para cada  $x_i$ , com  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , considere-se o retângulo de base  $[x_i, x_{i+1}]$  e de medida de altura  $\text{sen}(x_i)$ . Observe-se que cada retângulo tem de base  $\frac{\pi}{n}$  e de altura  $\text{sen}\left(\frac{i\pi}{n}\right)$ , sendo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

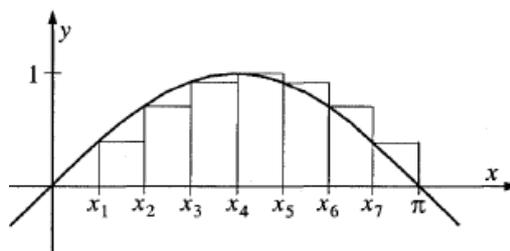


Figura 4.8 – Aproximação de  $S$

À medida que  $n$  aumenta, aumenta o número de retângulos e diminui o comprimento da respectiva base pelo que a soma das áreas dos retângulos se aproxima de  $S$ . Assim,

$$S \approx \frac{\pi}{n} \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \frac{\pi}{n} \text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \left( \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \right).$$

Designa-se por  $S_n$  a expressão do lado direito.

Considere-se o seguinte resultado relativo à soma de senos de ângulos múltiplos de um dado ângulo cuja demonstração se encontra em anexo (cf. *Anexo III.1*):

**TEOREMA 4.15.**  $\text{sen } x + \text{sen } (2x) + \dots + \text{sen } (nx) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$

Aplicando o teorema anterior e substituindo  $x$  por  $\frac{\pi}{n}$  obtém-se

$$S_n = \frac{\pi}{n} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2n}\right) \text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\pi}{n} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\pi}{n} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Como  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$  então  $S_n = \frac{\pi}{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$

Quando  $n$  tende para  $+\infty$ ,  $\frac{\pi}{2n}$  tende para zero. Como  $\cos 0 = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  (cf. *Capítulo 6*) então  $S = \lim S_n = 2 \times 1 \times 1 = 2.$

Concluimos, assim, que a área compreendida entre a curva da função seno e o eixo  $Ox$ , no intervalo  $[0, \pi]$  é 2.



## 4.2. TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na secção anterior analisámos algumas das propriedades das funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Nesta secção vamos relacionar propriedades geométricas dos gráficos das funções seno e cosseno com, respetivamente, a família de funções

$$y = a \text{sen}(bx + c) + d \quad \text{e} \quad y = a \text{cos}(bx + c) + d \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Estas funções designam-se, habitualmente, por **funções sinusoidais**.

Considere-se a família de funções  $y = a \text{sen}(bx + c) + d$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Vamos analisar o seu comportamento tendo em conta a variação de cada um dos parâmetros  $a, b, c$  e  $d$ . Considerem-se as seguintes cinco situações:

1.  $y = \text{sen}(x + c)$
2.  $y = \text{sen}(bx)$
3.  $y = \text{sen}(bx + c)$
4.  $y = a \text{sen } x$
5.  $y = \text{sen } x + d.$

Observe-se que os gráficos das funções acima referidas correspondem a transformações geométricas no plano do gráfico de  $y = \text{sen } x$ .

Considere-se a função  $f(x) = \text{sen } x$ .

**1ª Situação:** Considere-se a família de funções  $g(x) = \text{sen}(x + c)$ .

Tem-se que  $a = 1, b = 1, c$  arbitrário e  $d = 0$ .

Para melhor compreender o efeito do parâmetro  $c$  no gráfico da função  $g$  podemos visualizar as representações gráficas de algumas funções dessa família, atribuindo a  $c$  diferentes valores. Por exemplo, se  $c = -\frac{\pi}{4}$  e se  $c = \frac{\pi}{3}$  tem-se, respetivamente, as funções

$$g_1(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ e } g_2(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

cujas representação gráfica se observa na figura seguinte (cf. *Figura 4.9*).

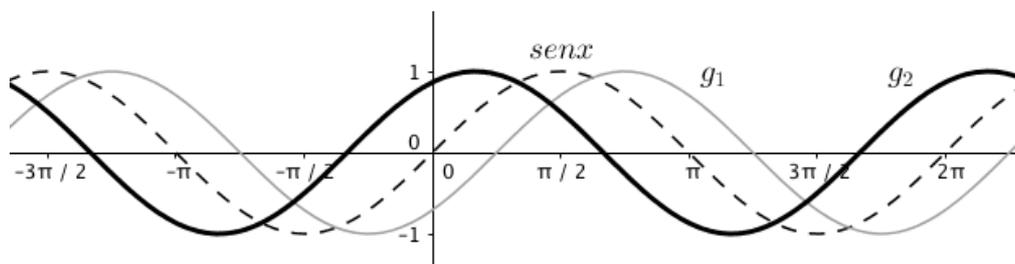


Figura 4.9 – Representação gráfica das funções  $f(x) = \text{sen } x, g_1(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{4})$  e  $g_2(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{3})$

Observe-se que, no primeiro caso, o gráfico resulta da aplicação ao gráfico de  $f$  de uma translação segundo o vetor  $\vec{u}(\frac{\pi}{4}, 0)$  e, no segundo caso, de uma translação segundo o vetor  $\vec{u}(-\frac{\pi}{3}, 0)$ . Assim, o contradomínio e a periodicidade de  $g_1$  e de  $g_2$  mantêm-se iguais aos da função  $f$ , mas os zeros não são os mesmos dos zeros de  $f$ .

**OBSERVAÇÃO.** No caso particular de  $c = -\frac{\pi}{2}$  tem-se  $g(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = \text{cos } x$  pelo que se conclui, como vimos anteriormente, que o gráfico de  $y = \text{cos } x$  resulta da aplicação ao gráfico de  $y = \text{sen } x$  de uma translação segundo o vetor  $\vec{u}(\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Podemos, assim, concluir que:

O gráfico da função  $y = \text{sen}(x + c)$  obtém-se a partir do gráfico da função  $y = \text{sen } x$  através de uma **translação** segundo o **vetor**  $\vec{u}(-c, 0)$ ; se  $c > 0$ , há uma deslocação para a esquerda e se  $c < 0$  há uma deslocação para a direita. A constante  $c$  designa-se por **fase** da função.

**2ª Situação:** Considere-se a família de funções  $g(x) = \text{sen}(bx)$ .

Tem-se  $a = 1, b \neq 0, c = 0$  e  $d = 0$ .

Vamos atribuir valores ao parâmetro  $b$  e estudar o comportamento da função obtida. Suponhamos, em primeiro lugar,  $b > 1$  e em segundo,  $0 < b < 1$ . Nos casos  $b = 2$  e  $b = \frac{1}{2}$ , tem-se, respetivamente, as funções  $g_1(x) = \text{sen}(2x)$  e  $g_2(x) = \text{sen}(\frac{1}{2}x)$  cuja representação gráfica se ilustra na figura seguinte (cf. *Figura 4.10*).

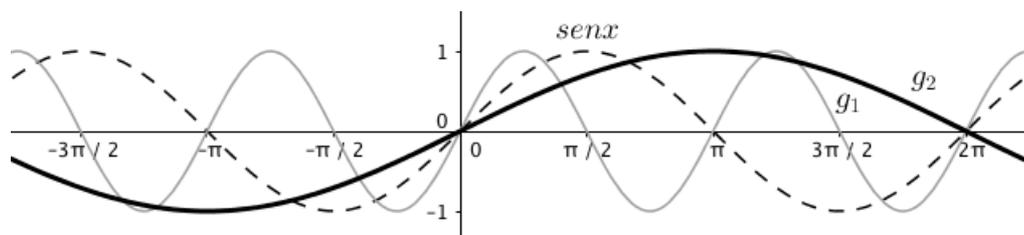


Figura 4.10 – Representação gráfica das funções  $f(x) = \text{sen } x, g_1(x) = \text{sen}(2x)$  e  $g_2(x) = \text{sen}(\frac{1}{2}x)$

Da análise gráfica observa-se que, em ambos os casos, o contradomínio se mantém, mas que há alteração da periodicidade das funções. Note-se que o período de  $y = \text{sen } x$  é  $2\pi$  pelo que um ciclo de  $y = \text{sen } (2x)$  começa em  $x = 0$  e os valores voltam a repetir-se quando  $2x = 2\pi$ , ou seja, quando  $x = \pi$ . De facto, por observação gráfica constata-se que a função  $y = \text{sen } (2x)$  assume, no intervalo  $[0, \pi]$ , os mesmos valores que a função  $y = \text{sen } x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  pelo que se conclui que o gráfico da função sofre uma compressão horizontal de fator  $\frac{1}{2}$ .

Se  $b = \frac{1}{2}$ , a função  $y = \text{sen } \left(\frac{1}{2}x\right)$  assume, no intervalo  $[0, 4\pi]$ , os mesmos valores que a função  $y = \text{sen } x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ , sendo que o gráfico sofre uma dilatação horizontal de fator 2.

Podemos, assim, concluir que:

O gráfico da função  $y = \text{sen } (bx)$  obtém-se a partir do gráfico da função  $f(x) = \text{sen } x$  através, respetivamente, de uma **compressão horizontal** de fator  $\frac{1}{b}$ , se  $b > 1$ , e de uma **dilatação horizontal** de fator  $\frac{1}{b}$ , se  $0 < b < 1$ .

Se  $b < 0$ , como a função seno é ímpar, tem-se  $\text{sen } (bx) = -\text{sen } (-bx)$ , logo o gráfico de  $y = \text{sen } (bx)$  obtém-se a partir do gráfico de  $f$  através de uma **compressão horizontal** de fator  $\left|\frac{1}{b}\right|$  **seguida de uma reflexão** segundo o eixo  $Ox$ , se  $b < -1$ ; e através de uma **dilatação horizontal** de fator  $\left|\frac{1}{b}\right|$  **seguida de uma reflexão** segundo o eixo  $Ox$ , se  $-1 < b < 0$ .

Caso  $b = -1$ , tem-se  $g(x) = -\text{sen } x$  cujo gráfico se obtém a partir do gráfico de  $y = \text{sen } x$  através de uma reflexão segundo o eixo  $Ox$ .

A constante  $b$  designa-se por **pulsção** da função.

3ª Situação: Considere-se a família de funções  $g(x) = \text{sen } (bx + c)$ .

Tem-se  $a = 1, b \neq 0, c$  arbitrário e  $d = 0$ . Observe-se que  $g(x) = \text{sen } (bx + c) = \text{sen } \left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right)$ .

De acordo com o estudado anteriormente, conclui-se que o gráfico da função  $y = \text{sen } (bx + c)$  se obtém a partir do gráfico da função  $y = \text{sen } x$  através, respetivamente, de

- uma *translação* segundo o vetor  $\vec{u}\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$  seguida de uma *compressão horizontal* de fator  $\frac{1}{b}$ , se  $b > 1$ ;
- uma *translação* segundo o vetor  $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$  seguida de uma *dilatação horizontal* de fator  $1/b$ , se  $0 < b < 1$ ;
- uma *translação* e de uma *compressão/dilatação*, seguidas de uma *reflexão* segundo o eixo  $Ox$ , se  $b < 0$ .

Os casos  $b = 1$  ou  $c = 0$  correspondem a situações estudadas anteriormente.

4ª Situação: Considere-se a família de funções  $g(x) = a \text{sen } x$ .

Considere-se  $a \neq 0, b = 1, c = 0, d = 0$ .

Vamos atribuir dois valores ao parâmetro  $a$  e estudar o comportamento da função obtida.

Suponhamos, em primeiro lugar, que  $a > 1$ , por exemplo,  $a = 3$ ; e, em segundo lugar, que  $0 < a < 1$ .

Tem-se, respetivamente,  $g_1(x) = 3 \text{sen } x$  e  $g_2(x) = \frac{1}{3} \text{sen } x$  (cf. *Figura 4.11*).

Da análise da representação gráfica das funções  $f$  e  $g_1$  observa-se que o gráfico da função  $y = a \text{sen } x$  obtém-se a partir do gráfico de  $y = \text{sen } x$  por uma dilatação vertical de fator 3, ou seja, os valores da variável dependente passam a variar entre  $-3$  e  $3$  (em torno do eixo  $Ox$ ). Embora haja

alteração no contradomínio da função, as funções têm mesmos zeros e atingem os respectivos valores máximos e mínimos para os mesmos valores de  $x$ .

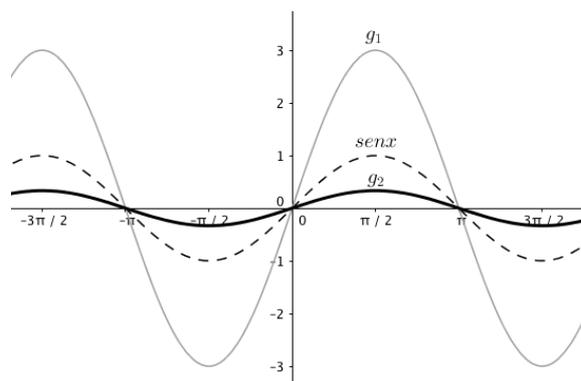


Figura 4.11 – Representação gráfica das funções  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $g_1(x) = 3 \text{ sen } x$  e  $g_2(x) = \frac{1}{3} \text{ sen } x$

Analisemos, agora, a representação gráfica das funções  $f$  e  $g_2$ . Neste caso, constata-se que o gráfico da função  $y = a \text{ sen } x$  se obtém do gráfico de  $y = \text{sen } x$  por uma compressão vertical de fator  $\frac{1}{3}$ , ou seja, que os valores da variável dependente passam a variar entre  $-\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{3}$  (em torno do eixo  $Ox$ ). Analogamente ao caso anterior, o contradomínio da função altera-se, mas as funções têm os mesmos zeros e atingem os respectivos valores máximos e mínimos para os mesmos valores de  $x$ .

Podemos, assim, concluir que:

O gráfico da função  $y = a \text{ sen } x$  obtém-se a partir do gráfico da função  $f(x) = \text{sen } x$  através, respectivamente, de uma **dilatação vertical** de fator  $a$ , se  $a > 1$ ; e de uma **compressão vertical** de fator  $a$ , se  $0 < a < 1$ .

Se  $a < 0$ , tem-se que  $a \text{ sen } x = -a \text{ sen } (x + \pi)$ , logo o gráfico de  $y = a \text{ sen } x$  obtém-se a partir do gráfico de  $f(x) = \text{sen } x$  através de uma **translação** segundo o vetor  $\vec{u}(-\pi, 0)$  seguida de uma **dilatação vertical** de fator  $|a|$ , se  $a < -1$ ; e de uma **translação** segundo o vetor  $\vec{u}(-\pi, 0)$  seguida de uma **compressão vertical** de fator  $|a|$ , se  $-1 < a < 0$ .

Se  $a = -1$ , tem-se  $\text{sen } (x + \pi) = -\text{sen } x$ , logo conclui-se que o gráfico da função se obtém a partir do gráfico de  $f(x) = \text{sen } x$  através de uma **translação** segundo o vetor  $\vec{u}(-\pi, 0)$ .

A constante  $|a|$  designa a **amplitude** da função.

**5ª Situação:** Considere-se a família de funções  $g(x) = \text{sen } x + d$ .

Tem-se  $a = 1, b = 1, c = 0$  e  $d$  arbitrário.

Vamos atribuir valores ao parâmetro  $d$  e estudar o comportamento da função obtida. Por exemplo, para  $d = 2$  e para  $d = -3$  tem-se, respectivamente, as funções

$g_1(x) = \text{sen } x + 2$  e  $g_2(x) = \text{sen } x - 3$  cuja representação gráfica se observa na figura seguinte (cf. Figura 4.12).

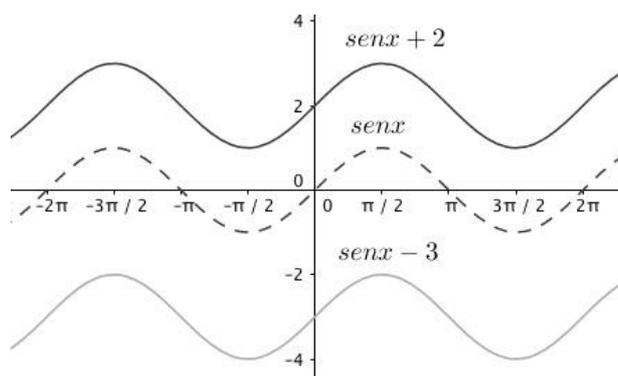


Figura 4.12 – Representação gráfica das funções  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $g_1(x) = \text{sen } x + 2$  e  $g_2(x) = \text{sen } x - 3$

Observa-se que, no primeiro caso, a função  $y = \text{sen } x$  sofre uma translação segundo o vetor  $(0,2)$  e, no segundo caso, sofre uma translação segundo o vetor  $(0, -3)$ .

Podemos, assim, concluir que:

O gráfico da função  $y = \text{sen } (x) + d$  obtém-se a partir do gráfico da função  $y = \text{sen } x$  através de uma **translação** segundo o vetor  $\vec{u}(0, d)$ ; se  $d > 0$ , desloca-se na vertical para cima e se  $d < 0$ , desloca-se na vertical para baixo.

Um estudo análogo pode ser efetuado para a família de funções  $y = a \cos(bx + c) + d$  se começarmos por reescrever esta família de funções em termos  $y = a' \text{sen } (b'x + c') + d$ . Tem-se que  $y = a \cos(bx + c) + d = a \text{sen} \left( bx + c + \frac{\pi}{2} \right) + d = a \text{sen} (bx + c') + d$  com  $c' = c + \frac{\pi}{2}$ .

Da análise efetuada, constata-se que o conhecimento de uma dada função sinusoidal permite descrever as características de uma família de funções sinusoidais que se obtém adicionando e/ou multiplicando uma constante à variável dependente e/ou à variável independente.

### 4.3. SOMA DE FUNÇÕES SINUSOIDAIS

Nesta secção apresentamos alguns resultados importantes sobre a combinação linear de funções seno e cosseno com a mesma pulsação. Considere-se a família de funções sinusoidais:

$$y = a \text{sen} (bx + c), a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a, b > 0.$$

**DEFINIÇÃO 4.6** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções e  $a, b \in \mathbb{R}$ . A função  $y = a f(x) + b g(x)$  é designada por **combinação linear** das funções  $f$  e  $g$ .

Começemos por analisar uma situação que envolve combinações lineares de  $y = \text{sen } x$  e  $y = \cos x$ . Vejamos, a título de exemplo, como traçar o gráfico da função

$$y = \frac{1}{2} \text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \text{ a partir do gráfico da função } y = \text{sen } x.$$

Tem-se que  $\text{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ . Recorrendo à fórmula do seno da adição de dois ângulos, obtém-se

$$\frac{1}{2} \text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \text{sen } x + \text{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \cos x = \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Donde se conclui que o gráfico da função  $y = \frac{1}{2} \text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$  se obtém do gráfico de  $y = \text{sen } x$  através de uma translação segundo o vetor  $\vec{u} \left( -\frac{\pi}{3}, 0 \right)$ .

No exemplo anterior, constatámos que a combinação linear das funções  $y = \text{sen } x$  e  $y = \cos x$  resultou numa função sinusoidal da forma  $y = a \text{sen} (x + c)$ . Observe-se que as funções  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \cos x$  e  $y = a \text{sen} (x + c)$  apresentam todas mesma pulsação ( $b = 1$ ).

Mas será que o resultado é sempre verdadeiro? O teorema seguinte estabelece um resultado importante relativo a combinação linear de funções sinusoidais com a mesma pulsação:

**TEOREMA 4.15** Considerem-se  $A, B, k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**[A]** Qualquer combinação linear das funções  $f(x) = \text{sen} (kx)$  e  $g(x) = \cos (kx)$ , pode ser escrita na forma  $A \text{sen} (kx + \alpha)$  ou  $B \cos (kx + \beta)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**[B]** As funções  $f(x) = A \text{sen} (kx + \alpha)$  e  $g(x) = B \cos (kx + \beta)$ , podem ser escritas como combinação linear das funções  $y = \text{sen} (kx)$  e  $y = \cos (kx)$ .

**Demonstração.**

[A] Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere-se a combinação linear  $af(x) + bg(x)$  e vejamos que existem  $A$  e  $\alpha$  tais que  $a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Como  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ , existe  $\alpha \in [0, 2\pi[$  tal que

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{a}{d} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{d}, \text{ com } d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Multiplicando e dividindo a expressão  $a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx)$  por  $d$  obtém-se

$$d \left( \frac{a}{d} \operatorname{sen}(kx) + \frac{b}{d} \operatorname{cos}(kx) \right) = d(\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}(kx) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}(kx)).$$

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos obtém-se

$$a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = d \operatorname{sen}(kx + \alpha) \text{ com } d = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Tomando  $A = d = \sqrt{a^2 + b^2}$  vem

$$a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha).$$

Vejamos agora que também se tem  $a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = B \operatorname{cos}(kx + \beta), \forall x \in \mathbb{R}$  com  $B$  e  $\beta$  a determinar. Sabe-se que  $\operatorname{sen} x = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , assim

$$a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha) = A \operatorname{cos}\left((kx + \alpha) - \frac{\pi}{2}\right) = A \operatorname{cos}\left(kx + \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Tomando  $B = A$  e  $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$  tem-se  $a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = B \operatorname{cos}(kx + \beta)$ . ■

[B] Vejamos que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $A \operatorname{sen}(kx + \alpha) = a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Pela fórmula do seno da soma de dois ângulos, tem-se

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(kx + \alpha) &= A(\operatorname{sen}(kx) \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}(kx)) = (A \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen}(kx) + (A \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{cos}(kx) = \\ &= a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) \text{ com } a = A \operatorname{cos} \alpha \text{ e } b = A \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Vejamos, agora, que  $B \operatorname{cos}(kx + \beta) = a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx)$ .

Recorrendo à identidade  $\operatorname{cos} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  tem-se

$$B \operatorname{cos}(kx + \beta) = -B \operatorname{sen}\left((kx + \beta) - \frac{\pi}{2}\right) = -B \operatorname{sen}\left(kx + \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -B \operatorname{sen}(kx + \alpha), \quad \alpha = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

De (1) vem

$$B \operatorname{cos}(kx + \beta) = a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx), \quad a = -B \operatorname{cos}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \text{ e } b = -B \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right). \quad \blacksquare$$

Da demonstração do teorema anterior resulta que

$$\begin{aligned} &a \operatorname{sen}(kx) + b \operatorname{cos}(kx) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha) \\ \text{com } A &= \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \alpha \text{ tal que } \operatorname{cos} \alpha = \frac{a}{A} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{A}. \end{aligned}$$

Observe-se que com o auxílio de um ângulo cuidadosamente escolhido e de uma identidade trigonométrica é possível escrever uma combinação linear de funções sinusoidais (com a mesma pulsação) como uma função sinusoidal. Este processo designa-se por **método do ângulo auxiliar**.

Vimos que a combinação linear de  $y = \operatorname{sen}(kx)$  e  $y = \operatorname{cos}(kx)$  é uma função sinusoidal. Mas será que a combinação linear de duas funções sinusoidais arbitrárias é sinusoidal?

Considerem-se, por exemplo, as funções sinusoidais

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ e } h(x) = 3 \operatorname{sen}(2x).$$

Vamos considerar a combinação linear correspondente à soma de duas das funções indicadas. Na figura seguinte ilustra-se os gráficos das funções  $f + g$  e  $f + h$  (cf. Figuras 4.13).

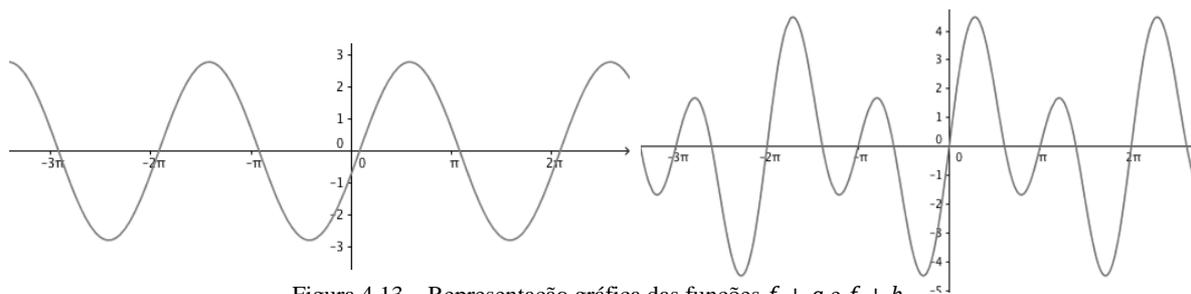


Figura 4.13 – Representação gráfica das funções  $f + g$  e  $f + h$

Observe-se que, no primeiro caso, se adicionaram duas funções com a mesma pulsação e obteve-se uma função sinusoidal, enquanto no segundo caso, adicionaram-se duas funções com diferente pulsação, e obteve-se uma função periódica mas não sinusoidal. Analisemos mais pormenorizadamente a função  $f + h$ . Sabe-se que a função seno é  $2\pi$ -periódica, pelo que

$$(f + h)(x + 2\pi) = 2 \operatorname{sen}(x + 2\pi) + 3 \operatorname{sen}(2(x + 2\pi)) = 2 \operatorname{sen}(x + 2\pi) + 3 \operatorname{sen}(2x + 4\pi) \\ = 2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen}(2x) = (f + h)(x).$$

Logo  $f + h$  é periódica de período  $2\pi$ .

Por outro lado, tem-se

$$(f + h)(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x + 6 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x (2 + 3 \cos x).$$

Note-se que não foi possível escrever  $f + h$  nem na forma  $A \operatorname{sen}(kx + \alpha)$  nem na forma  $a \operatorname{sen}(kx) + b \cos(kx)$ .

Os teoremas seguintes estabelecem mais dois resultados importantes relativos à combinação linear de funções sinusoidais com a mesma pulsação. A demonstração destes teoremas encontra-se em anexo (cf. *Anexo III.2*).

**TEOREMA 4.16** Sejam  $f(x) = a_1 \operatorname{sen}(bx + c_1)$  e  $g(x) = a_2 \operatorname{sen}(bx + c_2)$  duas funções sinusoidais com a mesma pulsação. Então a soma das duas funções sinusoidais é, ainda, uma função sinusoidal com a mesma pulsação, ou seja,

$$a_1 \operatorname{sen}(bx + c_1) + a_2 \operatorname{sen}(bx + c_2) = a_3 \operatorname{sen}(bx + c_3), \forall x \in \mathbb{R}, a_i, b, c_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Observe-se que neste teorema as funções têm a mesma pulsação, mas podem ter diferentes amplitudes e fases.

**TEOREMA 4.17** Uma combinação linear de  $y = \operatorname{sen}(bx + c)$  e de  $y = \cos(bx + c)$  é uma combinação linear de  $y = \operatorname{sen}(bx)$  e  $y = \cos(bx)$ , ou seja,

$$a_1 \operatorname{sen}(bx + c) + a_2 \cos(bx + c) = a_3 \operatorname{sen}(bx) + a_4 \cos(bx), \forall x \in \mathbb{R}, a_i, b, c \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Para melhor compreender o teorema anterior, analisemos, a título de exemplo, uma combinação linear de  $y = \operatorname{sen}(bx + c)$  e de  $y = \cos(bx + c)$ .

Seja  $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ . Tem-se  $b = 1$  e  $c = \frac{\pi}{3}$ . Recorrendo às fórmulas do seno e do cosseno da adição obtém-se

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x + 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ = 3 \operatorname{sen} x \times \frac{1}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + 4 \cos x \times \frac{1}{2} - 4 \operatorname{sen} x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ = \left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\right) \cos x.$$

Donde se conclui que a função  $f$  é combinação linear de  $y = \operatorname{sen} x$  e de  $y = \cos x$ .

Observe-se que a função  $f(x)$  resulta da aplicação de uma translação segundo o vetor  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  ao gráfico da função  $g(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{cos} x$ . O que significa que se deslocarmos horizontalmente (para a esquerda ou para a direita) uma função sinusoidal, a função mantém a sua pulsação.

Vejamos, por último, o que podemos afirmar relativamente ao período da soma de funções sinusoidais com diferente pulsação. O teorema seguinte enuncia uma propriedade relativa à periodicidade da soma de funções sinusoidais:

**TEOREMA 4.18** Considerem-se duas funções sinusoidais

$f(x) = a_1 \operatorname{sen}(b_1 x + c_1)$  e  $g(x) = a_2 \operatorname{sen}(b_2 x + c_2)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i, b_i \neq 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .  
Então a soma das funções  $f$  e  $g$  é uma função periódica se e só se  $\frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}$ .

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ) A prova desta implicação será apresentada posteriormente (cf. *Anexo IV.1*).

( $\Leftarrow$ ) Considere-se  $b_1 \neq b_2$  tal que  $\frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}$ .

Ora  $f$  e  $g$  são periódicas e admitem período  $T_1 = \frac{2\pi}{|b_1|}$  e  $T_2 = \frac{2\pi}{|b_2|}$ , respetivamente.

Tem-se que  $\frac{T_2}{T_1} = \left| \frac{b_1}{b_2} \right| \in \mathbb{Q}$  então existem  $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tais que  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow qT_2 = pT_1$ .

Seja  $T = qT_2 = pT_1$ . Como  $f$  e  $g$  admitem período  $T_1$  e  $T_2$ , respetivamente, então também admitem período  $T$ . Do teorema 4.16 resulta que a soma de duas funções sinusoidais com o mesmo período é uma função sinusoidal com o mesmo período, pelo que  $f + g$  é  $T$ -periódica. ■

O teorema anterior refere-se apenas à periodicidade da soma de duas funções sinusoidais, no entanto, aplicando um processo por recorrência, pode estudar-se a periodicidade da soma de  $n$  funções sinusoidais.

#### 4.4. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Segue-se o estudo das designadas **funções trigonométricas inversas**: arco seno, arco cosseno e arco tangente. Como vimos anteriormente, as funções seno, cosseno e tangente são periódicas, pelo que não são funções injetivas<sup>28</sup> no seu domínio e, conseqüentemente, não admitem inversa. Contudo, podemos restringir cada uma das funções trigonométricas a um conjunto adequado de modo a obter uma função injetiva admitindo, portanto, inversa.

##### 4.4.1 FUNÇÃO ARCO-SENO

Considere-se a função seno. Se restringirmos a função seno, por exemplo, aos intervalos,  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ou  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , obtemos funções injetivas (que serão bijetivas<sup>29</sup> se considerarmos para conjunto de chegada o contradomínio de cada restrição) (cf. *Figuras 4.14 e 4.15*).

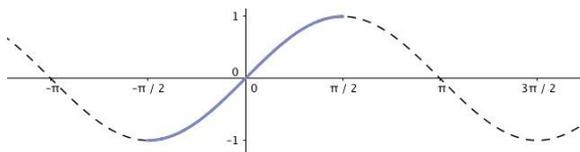


Figura 4.14 – Representação gráfica da função  $f(x) = \operatorname{sen} x$  em  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

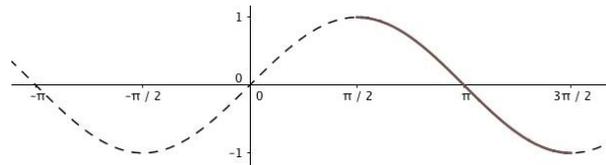


Figura 4.15 – Representação gráfica da função  $f(x) = \operatorname{sen} x$  em  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

<sup>28</sup> Um função diz-se **injetiva** em  $A$  se e só se  $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ .

<sup>29</sup> Um função diz-se **bijetiva** de  $A$  para  $B$  se e só se  $\forall y \in B, \exists^1 x \in A, f(x) = y$ .

Assim, tomando um qualquer intervalo da forma  $\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$ , observa-se que o seno assume uma única vez todos os valores do intervalo  $[-1,1]$ , pelo que a função restrição considerada é injetiva. Designa-se o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  por **restrição principal** da função seno.

Vejamos então como definir a respetiva função inversa, tendo por base a **restrição principal**:

**DEFINIÇÃO 4.7** Designa-se por **função arco-seno**, e representa-se abreviadamente por **arcsen**, a função real de variável real de domínio  $[-1,1]$  e conjunto de chegada  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , que a cada  $x \in [-1,1]$  associa um número  $y = \text{arcsen } x$ , que se entende como a amplitude  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , em radianos, do arco cujo seno é  $x$ . Tem-se que

$$\text{arcsen } x = y \Leftrightarrow \text{sen } y = x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } x \in [-1,1].$$

**OBSERVAÇÃO.** A definição anterior é habitualmente tomada como a função inversa no seno. Contudo, pode considerar-se uma infinidade de restrições, bastando para tal considerar o seno restringido a um intervalo de amplitude  $\pi$  da forma  $I_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$  (cf. Anexo III.3).

Como consequência imediata da definição de arco-seno, tem-se o seguinte resultado:

**TEOREMA 4.19** Considerem-se  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $x \in [-1,1]$ . Tem-se que:

$$\text{arcsen}(\text{sen } \alpha) = \alpha \text{ e } \text{sen}(\text{arcsen } x) = x.$$

**OBSERVAÇÃO.** Simbolicamente, para qualquer restrição  $I_n$  do seno, denotamos um ângulo cujo seno é um dado número  $x$  por  $\text{arcsen } x$  ou  $\text{sen}^{-1}x$ . Apesar das notações serem equivalentes, a segunda é mais usual. É importante sublinhar, que na segunda notação,  $\text{sen}^{-1}x$  não é o mesmo que  $(\text{sen } x)^{-1} = \frac{1}{\text{sen } x}$ .

O gráfico da função arco-seno é a imagem do gráfico da restrição da função seno ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  pela reflexão de eixo de equação  $y = x$ , como se ilustra na figura ao lado (cf. Figura 4.16).

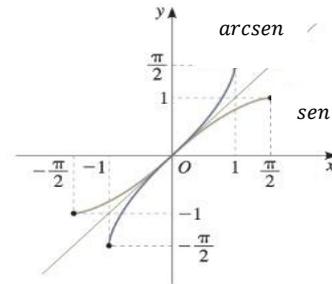


Figura 4.16 – Representação gráfica da função  $f(x) = \text{arcsen } x$

#### 4.4.2 FUNÇÃO ARCO-COSSENO

Analogamente à função seno, é possível restringir a função cosseno a conjunto adequado de modo a obter uma função injetiva, como se pode observar nas figuras seguintes (cf. Figuras 4.17 e 4.18). No caso do cosseno, a **restrição principal** é o intervalo  $[0, \pi]$ . Observe-se que quando  $x \in [0, \pi]$  (1º e 2º quadrantes), a função  $y = \text{cos } x$  assume uma única vez todos os valores do intervalo  $[-1,1]$ .

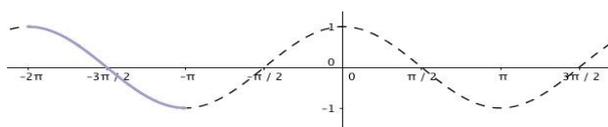


Figura 4.17 – Representação gráfica da função  $f(x) = \text{cos } x$  em  $[-2\pi, -\pi]$

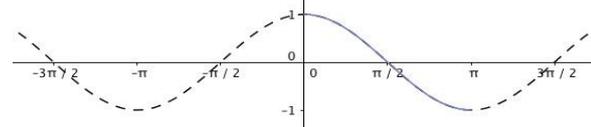


Figura 4.18 – Representação gráfica da função  $f(x) = \text{cos } x$  em  $[0, \pi]$

**DEFINIÇÃO 4.9** Designa-se por **função arco-cosseno**, e representa-se abreviadamente por **arccos**, a função real de variável real de domínio  $[-1,1]$  e conjunto de chegada  $[0, \pi]$ , que a cada  $x \in [-1,1]$

associa um número  $y = \arccos x$ , que se entende como a amplitude  $y \in [0, \pi]$ , em radianos, do arco cujo cosseno é  $x$ . Tem-se que

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, y \in [0, \pi] \text{ e } x \in [-1, 1]$$

**OBSERVAÇÃO.** À semelhança da função arco-seno, pode considerar-se uma infinidade de restrições, bastando para tal considerar o cosseno restringido a um intervalo de amplitude  $\pi$  da forma  $I_n = [n\pi, (n + 1)\pi], n \in \mathbb{Z}$ .

Como consequência imediata da definição de arco-cosseno, tem-se o seguinte resultado:

**TEOREMA 4.20** Considerem-se  $\alpha \in [0, \pi]$  e  $x \in [-1, 1]$ . Tem-se que:

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha \text{ e } \cos(\arccos x) = x$$

**OBSERVAÇÃO.** Analogamente ao seno, simbolicamente, para qualquer restrição  $I_n$  do cosseno, denotamos um ângulo cujo cosseno é um dado número  $x$  por  $\arccscos x$  ou  $\cos^{-1}x$ .

O gráfico da função arco-cosseno é a imagem do gráfico da restrição da função cosseno ao intervalo  $[0, \pi]$  pela reflexão de eixo de equação  $y = x$ , como ilustra a figura (cf. *Figura 4.19*).

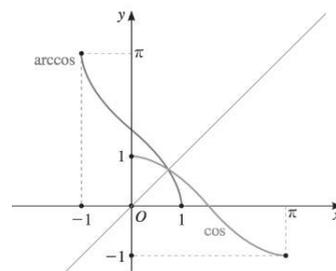


Figura 4.19 – Representação gráfica da função  $f(x) = \arccos x$

#### 4.4.3 Função arco-tangente

Na figura seguinte, apresenta-se a representação gráfica da função  $tg x$ . Observe-se que a função está definida em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  e que não é injetiva no respetivo domínio. À semelhança das funções seno e cosseno, para que admita inversa, torna-se necessário restringir a função a um intervalo adequado (cf. *Figura 4.20*).

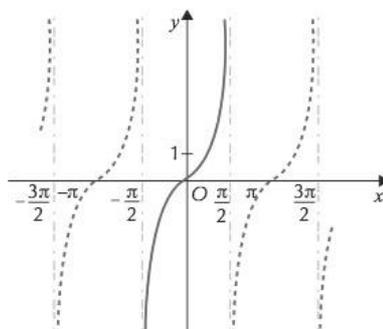


Figura 4.20 – Representação gráfica da função  $f(x) = tg x$  em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Assim, tomando um qualquer intervalo da forma  $\left] \frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2} \right[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , observa-se que a tangente assume uma única vez todos os valores reais, pelo que a função restrição considerada é injetiva nesse intervalo. Considera-se a **restrição principal** da tangente o intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

**DEFINIÇÃO 4.9** Designa-se por **função arco-tangente**, e representa-se abreviadamente por **arctg** ou **arctan**, a função real de variável real de domínio  $\mathbb{R}$  e conjunto de chegada  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , que a cada  $x \in \mathbb{R}$  associa um número  $y = \arctg x$ , que se entende como a amplitude  $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , em radianos, do arco cuja tangente é  $x$ . Tem-se que

$$\arctg x = y \Leftrightarrow tg y = x, y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Como consequência imediata da definição de arco-tangente, tem-se que:

**TEOREMA 4.21** Considerem-se  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:  

$$\arctg(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha \text{ e } \operatorname{tg}(\arctg x) = x.$$

O gráfico da função arco-tangente é a imagem do gráfico da restrição da função tangente ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pela reflexão de eixo de equação  $y = x$ , como se ilustra na figura ao lado (cf. *Figura 4.21*).

**OBSERVAÇÃO.** Para determinar os valores do *arcsen*, *arcos* e *arctg* de ângulos arbitrários podemos recorrer à calculadora: começamos por selecionar o radiano como unidade de medida de amplitude dos ângulos e, de seguida, recorremos às teclas da calculadora  $\operatorname{sen}^{-1}$ ,  $\operatorname{cos}^{-1}$  e  $\operatorname{tg}^{-1}$ . Os valores obtidos correspondem aos valores aproximados das funções *arcsen*, *arcos* e *arctg*. Para as funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente também é possível definir a função inversa, restringindo, mais uma vez, o domínio de forma adequada. No entanto, como estas funções inversas não são usadas com tanta regularidade, as calculadoras não apresentam uma tecla específica, contrariamente ao que acontece com as funções inversas do seno, do cosseno e da tangente.

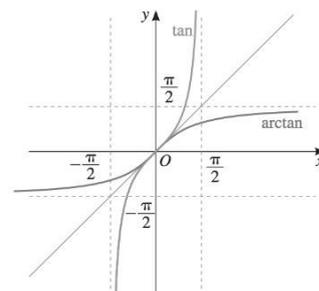


Figura 4.21 – Representação gráfica da função  $f(x) = \arctg x$

## CAPÍTULO 5 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ao resolver problemas que envolvem funções trigonométricas somos, muitas vezes, levados a resolver equações trigonométricas. Neste capítulo apresentamos a sistematização da resolução de algumas equações deste tipo.

### 5.1. Equações trigonométricas elementares

Uma **equação trigonométrica** é uma equação onde a variável a determinar é o argumento de uma ou mais funções trigonométricas. Neste capítulo analisaremos vários tipos de equações (lineares, quadráticas, ...) e diferentes processos de resolução. Em particular, abordaremos equações do tipo:

$$2 - 1 \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0 \quad 3 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{cos} \theta = 1.$$

Para resolver uma equação trigonométrica, deve, se possível, escrever-se as várias expressões em função de uma única função trigonométrica de um só ângulo, de modo a obter uma ou mais equações do tipo

$$\operatorname{sen} \alpha = a \quad \text{ou} \quad \operatorname{cos} \alpha = b \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Designaremos equações desta forma por **equações trigonométricas elementares**.

Nas duas primeiras situações, dado que as funções trigonométricas seno e cosseno têm contradomínio  $[-1,1]$ , as equações são possíveis se e só se  $a, b \in [-1,1]$ . No caso da equação  $\operatorname{tg} \alpha = c$ , sendo o contradomínio da função tangente  $\mathbb{R}$ , conclui-se que a mesma tem sempre solução qualquer que seja o valor de  $c$ .

Vejamos, a título de exemplo, como resolver equações trigonométricas elementares.

**Exemplo 5.1** Como encontrar, em  $\mathbb{R}$ , as soluções da equação  $-\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ ?

Começamos por reduzir a equação inicial a uma equação trigonométrica elementar, obtendo-se

$$-\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como  $\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1,1]$  sabemos que existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que  $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Neste caso específico, sabemos que em  $[0, 2\pi]$  existem exatamente dois ângulos tais que  $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , tendo-se

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a função seno é  $2\pi$ -periódica, então

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

No exemplo anterior, após reduzir a equação inicial a uma equação trigonométrica elementar, determinaram-se, recorrendo ao círculo trigonométrico, as soluções da equação num intervalo de comprimento  $2\pi$ . Tendo em conta a periodicidade das funções trigonométricas, encontraram-se as restantes soluções (infinitas).

**OBSERVAÇÃO.** Como vimos as soluções da equação  $-\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$  são:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tem-se que  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$  pelo que  $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi$ .

As soluções podem, assim, ser reescritas como:  $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Observe-se que a expressão  $2k\pi$  representa todos os múltiplos pares de  $\pi$  e a expressão  $(2k + 1)\pi$  representa todos os múltiplos ímpares de  $\pi$ . Podemos, assim, apresentar as soluções da equação de uma forma mais *elegante*, recorrendo a uma única expressão:  $\theta = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 5.2** Vamos determinar, em  $]-2\pi, 2\pi[$ , as soluções da equação  $2 \cos \theta = \sqrt{2}$ .

Começamos por reduzir a equação inicial a uma equação trigonométrica elementar, obtendo-se

$$2 \cos \theta = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como  $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]$  sabemos que existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Neste caso específico, sabemos que em  $[0, 2\pi]$  existem exatamente dois ângulos tais que  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tendo-se

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como a função cosseno é  $2\pi$ -periódica, então

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A partir destas expressões gerais, podemos encontrar soluções particulares, atribuindo valores a  $k$  e determinando o valor de  $\theta$  no intervalo pretendido.

$$\text{Se } k = 0 \text{ então } \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{7\pi}{4} \rightarrow \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \in ]-2\pi, 2\pi[$$

$$\text{Se } k = 1 \text{ então } \theta = \frac{9\pi}{4} \vee \theta = \frac{15\pi}{4} \rightarrow \left\{\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\} \notin ]-2\pi, 2\pi[$$

Note-se que a expressão assume valores tanto maiores quanto maior for o valor de  $k$  pelo que não vamos atribuir valores a  $k$  tais que  $k \geq 2$  dado que nesses casos  $\theta \notin ]-2\pi, 2\pi[$ .

$$\text{Se } k = -1 \text{ então } \theta = -\frac{7\pi}{4} \vee \theta = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\} \in ]-2\pi, 2\pi[$$

$$\text{Se } k = -2 \text{ então } \theta = -\frac{15\pi}{4} \vee \theta = -\frac{9\pi}{4} \rightarrow \left\{-\frac{15\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}\right\} \notin ]-2\pi, 2\pi[$$

Pela mesma razão,  $k$  não pode assumir valores inteiros inferiores a -2 porque nesses casos  $\theta \notin ]-2\pi, 2\pi[$ .

Conclui-se que as soluções da equação em  $]-2\pi, 2\pi[$  são:  $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

Analisados os exemplos anteriores e tendo em conta a definição e a periodicidade das funções trigonométricas podemos estabelecer o seguinte resultado:

**TEOREMA 5.1**

[A]  $\text{sen } x = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}.$

[B]  $\text{cos } x = \text{cos } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}.$

[C]  $\text{tg } x = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$

Observe-se alguns casos particulares das equações trigonométricas elementares apresentadas no teorema anterior:

**COROLÁRIO 5.1** Tem-se

[A]  $\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{sen } x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

[B]  $\text{cos } x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{cos } x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{cos } x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Demonstração.** Observe-se que em qualquer intervalo de comprimento  $2\pi$ , as funções seno e cosseno anulam-se duas vezes, no entanto, assumem o valor 1 e -1 apenas uma vez. Tem-se que

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \operatorname{sen} \pi = 0, \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ e } \cos \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Atendendo à periodicidade das funções seno e cosseno vem

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como em  $[0, 2\pi]$  o seno só assume o valor 1 em  $\frac{\pi}{2}$  e o valor  $-1$  em  $\frac{3\pi}{2}$

resultam as restantes equivalências de [A]. Analogamente para as equivalências de [B]. ■

Observe-se que nos casos particulares apresentados, as soluções das equações correspondem à expressão geral dos zeros, dos maximizantes e minimizantes das funções seno e cosseno.

## 5.2. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

As identidades trigonométricas estudadas anteriormente (cf. *Capítulo 3*) podem ser uma boa ajuda para reduzir a equação inicial a uma equação elementar.

Apresentamos, de seguida, a resolução de equações que envolvem algumas identidades trigonométricas, nomeadamente, a fórmula do seno do dobro de um ângulo, a relação entre razões de ângulos complementares e a fórmula fundamental da trigonometria.

**Exemplo 5.3** Vamos resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$ .

Começamos por reduzir a equação inicial a uma equação trigonométrica elementar. Recorrendo à fórmula do seno do dobro de um ângulo,  $\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2\theta)$ , obtém-se

$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\theta) = 1.$$

Pelo Teorema 5.1, tem-se

$$\operatorname{sen} (2\theta) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\theta) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 5.4** Vejamos, agora, como determinar, em  $\mathbb{R}$ , as soluções da equação  $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ .

### 1ª Resolução

À semelhança do primeiro exemplo, começamos por reduzir a equação inicial a uma equação trigonométrica elementar. Recorrendo à relação entre razões de ângulos complementares,

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ e aplicando o Teorema 5.1 obtém-se}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \cos \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \vee \theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como  $\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k\pi$  é uma equação impossível, tem-se que

$$\operatorname{sen} \theta = \cos \theta \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Conclui-se, assim, que as soluções da equação são:  $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

### 2ª Resolução

Se  $\cos \theta \neq 0$ , dividindo ambos os membros da equação por  $\cos \theta$  e recorrendo à identidade trigonométrica  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$  obtém-se

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta} \wedge \cos \theta \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \wedge \cos \theta \neq 0.$$

Tem-se que  $\operatorname{tg} \theta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

Pelo teorema 5.1,

$$\operatorname{tg} \theta = 1 \wedge \cos \theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Se  $\cos \theta = 0$  então  $\theta$  não é solução da equação, pois viria  $\operatorname{sen} \theta = 0 \wedge \cos \theta = 0$  o que é impossível.

Conclui-se, assim, que as soluções da equação são:  $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Observe-se que na segunda resolução apresentada, reduziu-se a equação inicial a uma equação elementar da forma  $\operatorname{tg} \alpha = c$ , dividindo ambos os membros da equação por  $\cos \theta$ . Este procedimento impõe uma restrição exógena à própria equação pelo que é necessário verificar o que se passa quando se tem a restrição oposta, para evitar a perda de soluções.

**Exemplo 5.5** Vamos resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ .

Começamos por reduzir a equação inicial a uma equação dependente de uma única função trigonométrica.

De  $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$  vem que

$$(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2.$$

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria e à fórmula do seno do dobro de um ângulo,

$$2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\theta) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} (2\theta) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos se todas as soluções encontradas são soluções da equação inicial.

Considere-se  $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  e  $\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Substituindo na equação,

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) + \cos \left( \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{4} \right) + \cos \left( \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq \sqrt{2}.$$

Conclui-se, assim, que as soluções da equação são:  $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Neste último exemplo, elevaram-se ambos os membros da equação ao quadrado, e obteve-se, como se pretendia, uma equação dependente de uma única função trigonométrica. No entanto, este processo pode conduzir à **introdução**<sup>30</sup> de soluções estranhas ao problema, pelo que foi necessário verificar (por substituição na equação inicial) se a equação admitia como solução todos os valores obtidos.

Um outro exemplo de aplicação de identidades trigonométricas à resolução de equações trigonométricas são equações que envolvem funções trigonométricas de ângulos múltiplos.

**Exemplo 5.6** Vejamos como resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\operatorname{sen} (7\theta) + \operatorname{sen}(5\theta) = 0$ .

Observe-se que a equação inicial envolve razões trigonométricas de ângulos múltiplos de  $\theta$ , em particular,  $7\theta$  e  $5\theta$ . Recorrendo às fórmulas de transformação logarítmica, nomeadamente, à identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (7\theta) + \operatorname{sen}(5\theta) = 0 &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} \left( \frac{7\theta + 5\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{7\theta - 5\theta}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} (6\theta) \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} (6\theta) = 0 \vee \cos \theta = 0 \Leftrightarrow 6\theta = k\pi \vee \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{6} \vee \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

<sup>30</sup>  $A^2 = B^2$  não é equivalente a  $A = B$ . Observe-se que  $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ , mas  $A^2 = B^2 \nRightarrow A = B$ .

No exemplo anterior, transformou-se num produto as parcelas do primeiro membro da equação tendo a equação inicial ficado reduzida a uma equação do tipo  $A \times B = 0$  que, como se sabe, é equivalente a  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

### 5.3. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 2º GRAU

Apresentamos, de seguida, exemplos de equações trigonométricas possíveis de transformar em equações de 2º grau dependentes de uma única função trigonométrica, ou seja, equações da forma,

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } x = \text{sen } \theta \text{ ou } x = \text{cos } \theta \text{ ou } x = \text{tg } \theta.$$

**Exemplo 5.7** Vamos determinar as soluções da equação  $2 \text{sen}^2 \theta + \text{sen } \theta = 0$ , em  $\mathbb{R}$ .

Observe-se que a equação inicial é uma equação de 2º grau dependente de uma única função trigonométrica,  $\text{sen } \theta$ . Fatorizando o primeiro membro e aplicando a lei do anulamento do produto, obtém-se

$$\begin{aligned} 2 \text{sen}^2 \theta + \text{sen } \theta = 0 &\Leftrightarrow \text{sen } \theta(2 \text{sen } \theta + 1) = 0 \Leftrightarrow \text{sen } \theta = 0 \vee 2 \text{sen } \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{sen } \theta = 0 \vee \text{sen } \theta = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$  e o seno é uma função ímpar,  $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ . Pelo teorema 5.1,

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta = 0 \vee \text{sen } \theta = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \text{sen } \theta = \text{sen } 0 \vee \text{sen } \theta = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Neste exemplo recorreu-se à estratégia de factorização para transformar a equação inicial em duas equações elementares. Mas nem sempre isto é possível. Analisemos outro exemplo.

**Exemplo 5.8** Vamos resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $2 \text{cos}^2 \theta + 5 \text{sen } \theta = 4$ .

Vamos começar por reduzir a equação inicial à mesma função trigonométrica.

Pela fórmula fundamental da trigonometria, tem-se que  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ , logo

$$\begin{aligned} 2 \text{cos}^2 \theta + 5 \text{sen } \theta = 4 &\Leftrightarrow 2(1 - \text{sen}^2 \theta) + 5 \text{sen } \theta = 4 \Leftrightarrow 2 - 2 \text{sen}^2 \theta + 5 \text{sen } \theta = 4 \\ &\Leftrightarrow 2 \text{sen}^2 \theta - 5 \text{sen } \theta + 2 = 0. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula resolvente, obtém-se

$$\text{sen } \theta = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \vee \text{sen } \theta = 2.$$

Como  $\text{sen } \theta = 2$  é uma equação impossível, tem-se que

$$2 \text{cos}^2 \theta + 5 \text{sen } \theta = 4 \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### 5.4. EQUAÇÃO LINEAR EM $\text{sen } \theta$ E $\text{cos } \theta$ .

Para além dos processos de resolução já apresentados, existem outros métodos particulares que permitem resolver outros tipos de equações. Nesta secção apresentamos a resolução de equações em que todos os termos são de 1º grau e contêm apenas funções seno e cosseno com o mesmo argumento. Consideremos a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 5.1** Designa-se por **equação linear em  $\text{sen } \theta$  e  $\text{cos } \theta$** , uma equação da forma

$$a \text{sen } \theta + b \text{cos } \theta = c \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}, a, b \neq 0.$$

Caso  $a = 0$  ou  $b = 0$ , a equação fica reduzida a uma equação elementar do tipo  $\cos \theta = \frac{c}{b}$  ou  $\sin \theta = \frac{c}{a}$ , cuja resolução foi apresentada anteriormente. Estas equações são possíveis se e só se  $\left| \frac{c}{b} \right| \leq 1$  ou  $\left| \frac{c}{a} \right| \leq 1$ , respetivamente.

Caso  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , o primeiro termo da equação corresponde à combinação linear das funções  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  que como vimos anteriormente (cf. *Subcapítulo 4.4.*), pode ser escrita como uma função sinusoidal, recorrendo ao **método do ângulo auxiliar**. Logo a equação fica, mais uma vez, reduzida a uma equação elementar da forma

$$A \sin(\theta + \alpha) = c \text{ ou } A \cos(\theta + \alpha) = c.$$

Vejamos um exemplo de resolução de uma equação linear em  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , recorrendo ao método do ângulo auxiliar.

**Exemplo 5.9** Vejamos como resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2$ .

Como o primeiro membro da equação inicial é uma combinação linear de funções seno e cosseno com o mesmo argumento,  $\theta$ , podemos escrevê-lo como uma função sinusoidal.

A equação  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2$  é da forma  $a \sin \theta + b \cos \theta = c$ , sendo  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$  e  $c = 2$ .

Como  $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}} = 1$  então a equação é possível.

Tem-se que  $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$  e existe  $\alpha \in ]0, 2\pi[$  tal que

$$\sin \alpha = \frac{b}{A} = \frac{1}{2} \text{ e } \cos \alpha = \frac{a}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como  $\sin \alpha > 0$  e  $\cos \alpha > 0$  então  $\alpha \in 1^{\circ}Q$ , donde  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

Tem-se que

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right).$$

Logo

$$\sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Um segundo processo de resolução de uma equação linear consiste em recorrer à **função trigonométrica**  $tg \left( \frac{\theta}{2} \right)$ . Como vimos, anteriormente (cf. *Subcapítulo 3.3.*), todas as funções trigonométricas, em particular a função seno e a função cosseno, podem exprimir-se racionalmente em função de  $tg \left( \frac{\theta}{2} \right)$ . Tem-se que

$$\sin \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \text{ e } \cos \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \text{ com } \frac{\theta}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (\theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Assim sendo, é possível transformar uma equação trigonométrica linear em  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  numa equação trigonométrica elementar dependente apenas da função  $tg \left( \frac{\theta}{2} \right)$ .

Suponhamos que  $c = 0$ . Tem-se a equação  $a \sin \theta + b \cos \theta = 0$ . Este caso é uma situação já estudada, dado que  $a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\frac{b}{a}$  sendo esta última uma equação elementar.

Suponhamos, agora, que  $c \neq 0$ . Considere-se a equação trigonométrica linear da forma:

$$a \sin \theta + b \cos \theta = c.$$

Seja  $y = \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)$  então  $\sin \theta = \frac{2y}{1+y^2}$  e  $\cos \theta = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ .

Substituindo na equação, obtém-se

$$a \left( \frac{2y}{1+y^2} \right) + b \left( \frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = c \Leftrightarrow 2ay + b - by^2 = c + cy^2 \wedge 1+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)y^2 - 2ay - b + c = 0 \wedge 1+y^2 \neq 0.$$

Constata-se, assim, que é possível transformar uma equação trigonométrica linear em  $\operatorname{sen} \theta$  e  $\operatorname{cos} \theta$  numa equação de 2º grau dependente de uma única função trigonométrica,  $\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)$ . Observe-se que esta estratégia só é possível se  $\theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Apresentamos, de seguida, um exemplo de aplicação deste processo de resolução:

**Exemplo 5.10** Vejamos como resolver, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta = 2$ .

Sabe-se que  $\operatorname{sen} \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}$  e  $\operatorname{cos} \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}$  com  $\frac{\theta}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ( $\theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ).

Substituindo na equação, obtém-se

$$\frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} = 2 \wedge \theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) + 1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2 + 2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \wedge \theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Considere-se  $y = \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)$  então

$$3y^2 - 2\sqrt{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}y - 1)^2 = 0.$$

Donde se obtém  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Assim,

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \neq \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \wedge \theta \neq \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Considere-se agora  $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Tem-se que } \sqrt{3} \operatorname{sen} (\pi + 2k\pi) + \operatorname{cos} (\pi + 2k\pi) = \sqrt{3} \operatorname{sen} (\pi) + \operatorname{cos} (\pi) = 0 - 1 = -1 \neq 2.$$

Logo a equação não admite as soluções  $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Conclui-se, assim, que  $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  são as únicas soluções da equação.

Observe-se que se verificou (por substituição na equação inicial) se a equação admitia ou não soluções em  $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , dado que a equivalência das equações era válida apenas para  $\theta \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

## CAPÍTULO 6 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### 6.1. ESTUDO DO $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

Nesta secção vamos deduzir alguns limites trigonométricos, com especial destaque, para o limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$  que designaremos por **limite notável**. Ou seja, vamos analisar, para ângulos muito pequenos, a razão entre o valor do seno de um ângulo, em radianos, e a medida do respetivo ângulo.

Começemos por enunciar um importante resultado sobre a continuidade das funções trigonométricas, cuja demonstração se apresenta em anexo (cf. *Anexo IV.2*).

#### TEOREMA 6.1

[A] A função seno é contínua em  $\mathbb{R}$ .

[B] A função cosseno é contínua em  $\mathbb{R}$ .

[C] A função tangente é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Considere-se a função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  e o respetivo gráfico, ilustrado na figura ao lado (cf. *Figura 6.1*). Listam-se algumas propriedades da função  $f$ .

Tem-se que:

- O domínio da função é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- A expressão geral dos zeros é dada por:  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  dado que  $\frac{\text{sen } x}{x} = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .
- A função  $f$  é par dado que  $f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sen } x}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- A função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

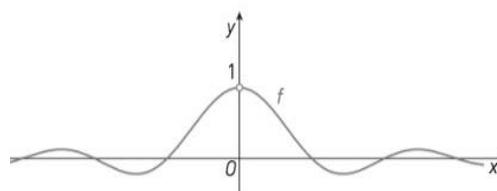


Figura 6.1 – Representação gráfica de  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Observe-se que a função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  não está definida para  $x = 0$ , pelo que não é possível determinar o valor da função nesse ponto. No entanto, é possível estudar o limite da função em  $x = 0$ , dado que o mesmo depende apenas do comportamento da função  $f$  numa vizinhança do ponto.

Sendo  $f$  uma função par em todo o seu domínio, é suficiente estudar o limite lateral ou à direita ou à esquerda do ponto para se estudar a existência de limite no ponto  $x = 0$ . Vamos determinar o limite lateral direito.

Se  $x > 0$  então  $\text{sen } x \leq x \leq \text{tg } x$  (cf. *Anexo IV*).

No intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$  a função seno é positiva, pelo que dividindo a expressão por  $\text{sen } x$ , vem

$$1 \leq \frac{x}{\text{sen } x} \leq \frac{1}{\text{cos } x} \Leftrightarrow \text{cos } x \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1. \tag{1}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{cos } x = \text{cos } 0 = 1$ , então pelo teorema das funções encastradas<sup>31</sup>,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

Tem-se, assim, que para ângulos muito pequenos, a medida do ângulo em radianos e o valor do seno são muito aproximados.

**TEOREMA 6.2** Designa-se por **limite notável** o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$  e tem-se  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

<sup>31</sup> **Teorema das funções encastradas:** Dado um número real  $L$  e as funções reais de variável real  $f, g$  e  $h$ , de domínio  $D$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , e se para todo o  $x \in D$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Apresentamos, agora, uma dedução alternativa do  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ , recorrendo a uma abordagem geométrica que envolve a comparação de áreas de figuras determinadas pelo círculo trigonométrico.

Considere-se um círculo trigonométrico de centro O e raio 1,  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a amplitude de  $\theta$  expressa em radianos e os triângulos [OAB] e [OAC], tal como ilustrado na figura (cf. *Figura 6.2*).

Sabe-se que  $S_{\Delta[OAC]} \leq S_{\text{setor } OAC} \leq S_{\Delta[OAB]}$  onde S representa a área.

Tem-se que

$$S_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{1 \times \text{tg } \theta}{2} = \frac{\text{tg } \theta}{2}$$

$$S_{[OAC]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{CD}}{2} = \frac{1 \times \text{sen } \theta}{2} = \frac{\text{sen } \theta}{2}$$

$$S_{\text{setor } OAC} = \frac{\theta}{2}.$$

Logo

$$\frac{\text{sen } \theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\text{tg } \theta}{2} \Leftrightarrow \text{sen } \theta \leq \theta \leq \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}.$$

No intervalo considerado a função seno é positiva, pelo que dividindo a expressão por  $\text{sen } \theta$ ,

$$\text{obtém-se } 1 \leq \frac{\theta}{\text{sen } \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta} \Leftrightarrow \cos \theta \leq \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \leq 1$$

Como  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = \cos 0 = 1$ , então  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$ .

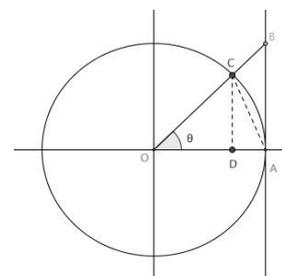


Figura 6.2 – Círculo trigonométrico

O limite notável que envolve a função seno permite resolver limites envolvendo outras funções trigonométricas, como mostramos no exemplo seguinte.

**Exemplo 6.1** Vejamos como determinar o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  temos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

Multiplicando e dividindo a expressão por  $\cos x + 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos^2 x)}{x(\cos x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \frac{-\text{sen } x}{(\cos x + 1)} = 1 \times \frac{-\text{sen } 0}{(\cos 0 + 1)} = 1 \times \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Conclui-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ .

## ■■■■ ENCANTO 7... FASCÍNIO PELO INFINITO

Uma das constantes mais estudadas e fascinante da matemática é o número Pi ( $\pi$ ) cujas propriedades têm encantado gerações de matemáticos. Sobre esta constante que representa a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, conhece-se, hoje, uma aproximação com mais de um milhão de algarismos. Mas nem sempre foi assim!

Foram diversas as tentativas para obter uma aproximação de  $\pi$ , desde os Babilónios que conseguiram o valor 3,125; passando pelos Egípcios que usavam o quadrado de  $\frac{16}{9}$  (aproximadamente 3,16); até Arquimedes (séc. III a.C.) que descobriu um método muito engenhoso para determinar  $\pi$ , recorrendo aos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, obtendo desta forma um limite inferior e superior para a constante,  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ .

Esta curiosidade estendeu-se ao longo do tempo, e séculos mais tarde, o fascínio pelo cálculo do

$\pi$  tomou conta dos Árabes e, posteriormente, dos Europeus que efetuaram inúmeras tentativas para obter o valor de  $\pi$  com o máximo de precisão possível.

Neste encanto apresentamos uma expressão, desenvolvida pelo francês François Viète<sup>32</sup>, que permite escrever o valor de  $\pi$  através de um produto de infinitos fatores:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

Esta expressão é designada por **Fórmula de Viète**.

Inspirado pelo trabalho desenvolvido por Arquimedes, Viète obteve esta expressão a partir de uma abordagem puramente geométrica recorrendo às áreas de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1. Começou por observar que a área de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1 é 2. De seguida, observou que se substituísse o quadrado por um octógono regular, a área deste seria  $2 \times \frac{2}{\sqrt{2}}$ . Se o polígono tivesse 16 lados, a área era dada por  $2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$  e, assim, sucessivamente.

Como à medida que aumentava o número de lados, a área do polígono inscrito aproximava-se da área do círculo, cuja área é igual a  $\pi$ , concluiu então que:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

Vejamos como obter esta expressão com base em resultados trigonométricos, nomeadamente, no limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  e nas fórmulas da duplicação de um ângulo.

Sabe-se que  $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen } x \cos x$ . Aplicando sucessivamente a fórmula do dobro de um ângulo à função  $\text{sen } x$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 4 \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 8 \text{sen}\left(\frac{x}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= 2^n \text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da equação por  $x$  obtém-se

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{2^n \text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right). \quad (1)$$

Considere-se a sucessão  $u_n = \frac{x}{2^n}$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}$  tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n} = 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  da definição de limite segundo Heine<sup>33</sup> vem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(u_n)}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1.$$

De (1) obtém-se

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \dots = 1 \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \dots =$$

<sup>32</sup> **François Viète** (1540 - 1603), matemático francês, um apaixonado pela álgebra que se notabilizou pelo trabalho que desenvolveu no aperfeiçoamento da notação matemática (foi o primeiro a representar números por letras).

<sup>33</sup> **Definição de limite segundo Heine:** Dada uma função  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o número real  $b$  designa-se por limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , se para toda a sucessão de  $(x_n)$  elementos de  $D$ , tal que  $x_n \rightarrow a$  se tem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ . Representa-se por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

$$= \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \dots$$

Como expressão é válida para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , em particular, é válida para  $x = \frac{\pi}{2}$ . Substituindo  $x$  por  $\frac{\pi}{2}$  obtém-se

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \dots$$

Como vimos em capítulos anteriores (cf. *Subcapítulo 3.3*),

$$\cos\left(\frac{45^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}, \text{ com } n + 1 \text{ raízes quadradas.}$$

$$\text{Donde } \frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots \text{ Ou seja, } \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

Esta é considerada a primeira fórmula que permite determinar  $\pi$  como um produto de infinito de fatores. ■ ■ ■ ■

## 6.2. DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O estudo do limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  permite não só determinar limites envolvendo diversas funções trigonométricas, mas é, também, muito útil no estudo das derivadas<sup>34</sup> das funções trigonométricas.

Considere-se a função trigonométrica  $f(x) = \text{sen } x$  cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . Aplicando a definição de derivada num ponto<sup>35</sup>, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}.$$

Pela fórmula do seno da adição de dois ângulos, tem-se que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x - \text{sen } x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1) + \text{sen } h \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\text{sen } h}{h}.$$

Como  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  (cf. *Exemplo 6.1*) e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$ , tem-se que

$$f'(x) = \text{sen } x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x.$$

Conclui-se, assim, que

**TEOREMA 6.3**  $(\text{sen } x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$

**OBSERVAÇÃO.** Aplicando a regra da derivada da função composta<sup>36</sup>, resulta que:

<sup>34</sup> Newton utilizou as **derivadas das funções seno e cosseno**, mas não as demonstrou. Foi Roger Cotes (1682-1716) no seu trabalho *Harmonia Mensurarum*, publicado em 1722, quem primeiro esboçou as respetivas regras de derivação. No entanto, Euler foi o primeiro a fazê-lo de forma sistemática

<sup>35</sup> Uma função  $f$  é **diferenciável em  $x_0$**  (ou **derivável em  $x_0$** ),  $x_0 \in D_f$ , se existe e é finito o limite  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ . Este limite é designado por derivada de  $f$  em  $x_0$ . A função  $f$  diz-se diferenciável num conjunto  $A$  se for diferenciável em todos os pontos de  $A$ .

$(\text{sen}(f(x)))' = f'(x) \cos(f(x))$ ,  $\forall x \in D_f$  tal que  $f$  é diferenciável em  $x$ .

Apresentamos, de seguida, uma dedução alternativa da derivada da função seno recorrendo às fórmulas de transformação logarítmica.

Aplicando a definição de derivada num ponto  $x = a$ , tem-se

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}.$$

Pela fórmula de transformação logarítmica, tem-se que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right) \cos \left( \frac{x+a}{2} \right)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \left( \frac{x+a}{2} \right).$$

Considere-se  $y = \frac{x-a}{2}$  então  $y \rightarrow 0$ , pelo que se obtém

$$f'(a) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos(y+a) = 1 \times \cos(0+a) = \cos a.$$

Conclui-se, assim, que  $(\text{sen } x)' = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Apresentamos, de seguida, uma dedução da derivada da função cosseno recorrendo às relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares.

Considere-se a função trigonométrica  $f(x) = \cos x$  cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . Sabe-se que  $\cos x = \text{sen} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$ .

Aplicando a regra da derivada da função composta

$(\cos(f(x)))' = f'(x) \text{sen}(f(x))$ ,  $\forall x \in D_f$  tal que  $f$  é diferenciável em  $x$ , resulta que

$$(\cos x)' = \left( \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \left( \frac{\pi}{2} - x \right)' \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -1 \times \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\text{sen } x.$$

Donde se conclui que

**TEOREMA 6.4**  $(\cos x)' = -\text{sen } x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Considere-se, agora, a função trigonométrica  $f(x) = \text{tg } x$  definida em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Sabe-se que  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ , pelo que aplicando a regra de derivação do quociente<sup>37</sup> e tendo em conta a fórmula fundamental da trigonometria e o conhecimento das derivadas das funções seno e cosseno, se obtém

$$\begin{aligned} (\text{tg } x)' &= \left( \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right)' = \frac{(\text{sen } x)' \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \text{sen } x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que

**TEOREMA 6.4**  $(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Mas não são só limites que as derivadas das funções trigonométricas permitem calcular. Podem também servir de base à demonstração de novas propriedades. A título de exemplo, apresentamos, em anexo, a demonstração da segunda implicação do Teorema 4.18 que tem por base as derivadas das funções trigonométricas (cf. Anexo IV.1).

<sup>36</sup> **Teorema (Regra de derivação da função composta):** Dadas duas funções  $f$  e  $g$  tais que  $a \in D_{g \circ f}$ ,  $f$  é derivável em  $a$  e  $g$  é derivável em  $f(a)$ , então a derivada de  $g \circ f$  em  $a$  é dada por:  $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$ .

<sup>37</sup> **Teorema (Regra de derivação do quociente):** Dadas duas funções  $f$  e  $g$  deriváveis em  $A$ ,  $g(x) \neq 0, \forall x \in A$ , então a derivada de  $\frac{f}{g}$  é dada por:  $\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \forall x \in A$ .

## CAPÍTULO 7 TRIGONOMETRIA – ALGUMAS APLICAÇÕES

### 7.1. OSCILADORES HARMÓNICOS

Nesta secção apresentamos algumas aplicações da trigonometria na modelação da realidade física, nomeadamente, a utilização de funções trigonométricas na modelação de sistemas que exibem um comportamento periódico e oscilatório.

Como é fácil constatar, existem diversos exemplos de **movimentos periódicos** à nossa volta: os batimentos cardíacos, o movimento de rotação da Terra em relação ao seu eixo, o movimento da Lua à volta da Terra, o movimento de um pêndulo de um relógio, entre outros. Movimentos estes que se caracterizam pela repetição contínua em intervalos de tempo iguais e sucessivos.

Quando um corpo executa movimentos periódicos de ida e volta em torno de uma posição de equilíbrio, ou seja, quando ocorrem deslocamentos simétricos em torno de um ponto, este designa-se por **movimento oscilatório**, sendo o sistema designado por **oscilador**. São exemplos de movimentos oscilatórios: o movimento de uma massa presa à extremidade de uma mola, as vibrações das cordas de um instrumento musical e o movimento de um pêndulo.

Os diferentes movimentos oscilatórios são definidos em termos dos tipos de forças que atuam sobre o sistema. Nesta secção analisaremos, em pormenor, o mais simples dos movimentos, onde não há forças externas a atuar no sistema, o **movimento oscilatório harmónico**, abreviadamente representado por MHS.

**DEFINIÇÃO 7.1** Designa-se por **oscilador harmónico** um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo  $I$ , de tal forma que a respetiva abcissa, como função de  $t \in I$ , é dada por

$$x(t) = A \cos (wt + \varphi), A, w > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$$

(ou equivalentemente,  $x(t) = A \sin (wt + \varphi)$ ,  $A, w > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ ).

As constantes  $A, w$  e  $\varphi$  são designadas, respetivamente, por **amplitude**, **pulsção** e **fase** do oscilador harmónico.

**OBSERVAÇÃO.** Por abuso de linguagem irá designar-se por oscilador harmónico a abcissa do ponto P,  $x(t)$ . Sabe-se que  $x(t) = A \cos (wt + \varphi) = A \sin (wt + \varphi + \frac{\pi}{2})$  pelo que escrever a equação em função de cosseno ou de seno depende apenas da fase da oscilação em  $t = 0$ .

Em geral, sendo  $x(t) = A \cos (wt + \varphi)$  com  $A, w > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$  a função que descreve o movimento oscilatório de um ponto P em torno de uma posição de equilíbrio tem-se que:

- a **amplitude**  $A$  é valor máximo do deslocamento do ponto relativamente à posição de equilíbrio. A unidade no SI é o metro. Como  $A > 0$  então  $-A \leq A \cos (wt + \varphi) \leq A$ , logo  $|x(t)| \leq A$ .
- o **período**  $T$  é o tempo correspondente a uma oscilação completa. A unidade no SI é o segundo. Tem-se que

$$x(t) = A \cos (wt + \varphi) = A \cos (wt + \varphi + 2\pi) = A \cos \left( w \left( t + \frac{2\pi}{w} \right) + \varphi \right) = x \left( t + \frac{2\pi}{w} \right).$$

Pelo que  $\frac{2\pi}{w}$  é um período de  $x$ .

- a **frequência**  $f$  é o número de oscilações completas por unidade de tempo. Tem-se  $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$ . A unidade no SI é o hertz<sup>38</sup> (Hz) ou  $s^{-1}$ .

---

<sup>38</sup> Esta unidade foi assim designada em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz (1857 – 1894), um pioneiro nas investigações das ondas eletromagnéticas.

- a **pulsção**  $w$  é o número de vezes que o período se repete num intervalo de comprimento  $2\pi$ . Tem-se que  $w = \frac{2\pi}{T}$ . A pulsção exprime-se em radianos por segundo.
- a **fase** ( $\varphi$ ) indica o ângulo em que o oscilador inicia o movimento; quando  $t = 0$ , tem-se,  $x(0) = A \cos(\varphi)$ . A título de exemplo, se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  tem-se  $x(0) = A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  o que significa que o corpo está inicialmente na chamada *posição de equilíbrio* (cf. *Secção 7.1.1*). Caso  $\varphi = 0$  então  $x(0) = A$ , pelo que o movimento que se inicia na posição correspondente ao valor máximo do deslocamento relativamente à posição de equilíbrio.

Por vezes, para descrever o movimento de um ponto P recorre-se a uma função da forma  $y(t) = A \cos(wt + \varphi) + d$   $A, w, d > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ . Embora não seja um oscilador harmónico, corresponde a um movimento oscilatório. A sua representação gráfica corresponde a uma translação vertical segundo o vetor  $\vec{u}(d, 0)$  do gráfico do oscilador harmónico  $x(t) = A \cos(wt + \varphi)$  e, analogamente ao oscilador harmónico, as constantes  $A, w$  e  $\varphi$  são designadas, respetivamente, por **amplitude, pulsção e fase**.

### 7.1.1. SISTEMA MASSA-MOLA

De seguida, apresentamos um caso particular de oscilador harmónico, o **sistema massa-mola**. Considere-se uma mola fixa na sua extremidade esquerda e um corpo P de massa  $m$ , fixo à extremidade direita da mola, que se desloca horizontalmente segundo o eixo  $Ox$ , como ilustra a figura (cf. *Figura 7.1*).

A origem do eixo corresponde à posição do corpo quando a mola se encontra em repouso, designada, habitualmente, por **posição de equilíbrio**. Vamos considerar que o corpo P apenas se encontra sujeito à força  $F_M$  exercida pela mola, desprezando-se qualquer efeito devido a atritos.

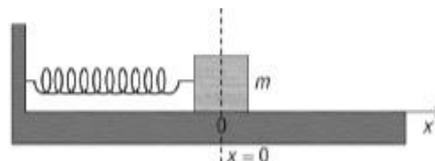


Figura 7.1 – Representação de um sistema massa-mola

Designemos por  $x(t)$  a abcissa da posição do corpo no instante  $t$ . Observe-se que caso nenhuma força atue sobre o corpo, este ocupa a posição de equilíbrio e tem-se  $x(0) = 0$ .

#### Como podemos descrever o movimento do corpo?

Em caso de compressão da mola, o corpo desloca-se para a esquerda,  $x(t) < 0$  sendo que a força  $F_M$  atua no sentido contrário ao movimento do corpo, ou seja, no sentido positivo do eixo  $Ox$ . Caso haja distensão da mola, a massa desloca-se para a direita,  $x(t) > 0$ , sendo que a força  $F_M$  atua no sentido negativo. Note-se que a força exercida pela mola é tanto maior quanto mais o corpo se afasta da posição de equilíbrio.

Tendo em conta que se pretende modelar a situação, podemos supor que a intensidade  $F_M$  depende linearmente da distância entre o corpo e a posição de equilíbrio. Mas será isto verdade? De facto, assim é. Ao estudar as deformações de molas e as forças aplicadas ao sistema, o famoso físico inglês, Robert Hooke<sup>39</sup>, verificou que a força produzida pela mola é diretamente proporcional, mas de sentido contrário, à do movimento do corpo, pelo que concluiu que:

**LEI DE HOOKE.** Seja  $F$  a força exercida sobre um corpo de massa  $m$  e  $x$  a distância do corpo relativamente à posição de equilíbrio. Tem-se

$$F = -kx, \quad k > 0, k \in \mathbb{R}$$

onde  $k$  representa a constante elástica da mola.

<sup>39</sup> **Robert Hooke (1635-1703)**, físico inglês, cujo principal contributo foi a formulação da Lei de Hooke após a observação do comportamento mecânico de uma mola.

**OBSERVAÇÃO.** O sinal negativo no segundo membro da equação indica que a força  $F$  é uma força restauradora, ou seja, é uma força com sentido oposto ao do movimento do corpo e que se direciona no sentido de trazer o corpo de volta à posição de equilíbrio. A Lei de Hooke é uma boa aproximação dos sistemas massa-mola apenas para valores pequenos de elongação da mola (quando o corpo não se afasta muito da posição de equilíbrio), dado que para além de um determinado valor de elongação a mola atinge um ponto de ruptura e a força deixa de ter um comportamento linear.

Combinando a **Lei de Hooke** com a **segunda Lei de Newton** que estabelece que:

**2ª Lei de Newton**<sup>40</sup>. Seja  $F$  a força exercida sobre um corpo de massa  $m$  e  $a$  designa a aceleração a que o corpo se encontra sujeito no instante  $t$ . Então  $F = ma$ .

e atendendo a que, sendo  $x(t)$  o deslocamento do corpo, a sua aceleração é dada por  $x''(t)$ , obtém-se a equação diferencial<sup>41</sup>

$$mx''(t) = -kx(t) \Leftrightarrow x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad (1)$$

designada, habitualmente, por **equação do movimento**.

Constata-se, assim, que num sistema massa-mola a aceleração é diretamente proporcional e de sentido contrário ao movimento do corpo.

#### **Mas que tipo de funções satisfazem a equação do movimento?**

Dado que o movimento descrito no sistema massa-mola tem as características de um movimento oscilatório harmónico, podemos ser levados a pensar que, provavelmente, o oscilador harmónico é um forte candidato a solução desta equação. Vejamos se assim acontece.

Considere-se  $x(t) = A \cos (wt + \varphi)$ ,  $A, w > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ .

Derivando a expressão uma vez obtém-se a velocidade do oscilador

$$x'(t) = -wA \operatorname{sen} (wt + \varphi)$$

e, derivando uma segunda vez, obtém-se a respetiva aceleração

$$x''(t) = -w^2A \cos (wt + \varphi).$$

Assim,  $x(t)$  satisfaz a equação diferencial  $mx''(t) = -kx(t)$

se, e só se,  $-mw^2A \cos (wt + \varphi) = -kA \cos (wt + \varphi) \Leftrightarrow w = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Como  $w > 0$  então  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Pelo que

$$x(t) = A \cos (wt + \varphi) \text{ é solução da equação (1) se e só se } w = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Analogamente, mostra-se que  $x(t) = A \operatorname{sen} (wt + \varphi)$  é solução da equação (1). É, ainda, possível mostrar recorrendo à teoria das equações diferenciais que todas as soluções da equação diferencial

$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$  são da forma  $x(t) = A \cos (wt + \varphi)$  com  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}, A > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ . Assim,

conclui-se que  $x(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi \right)$  com  $A > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$  é solução de  $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ , ou

seja, que um sistema constituído por uma mola fixa numa extremidade e por um corpo fixo na extremidade oposta constitui um oscilador harmónico.

Considerando agora um oscilador associado a uma mola observe-se que, para além da constante elástica da mola e da massa do corpo, este depende também das constantes  $A$  e  $\varphi$ . Estas constantes podem ser determinadas a partir das condições iniciais do sistema:  $x(0)$  e  $x'(0)$ . Note-se, ainda, que a

<sup>40</sup> A segunda lei de Newton é, também, conhecida por **Relação Fundamental da dinâmica (RFD)**.

<sup>41</sup> **Equação diferencial** é uma equação cuja incógnita é uma função e onde figura pelo menos uma das derivadas dessa função.

pulsção do oscilador depende apenas da constante elástica da mola e da massa  $m$  do corpo.

Atendendo a que  $w = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T = \frac{1}{f}$  e  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$  obtém-se, ainda,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  e  $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Assim sendo,  $T$  aumenta quando aumenta a massa  $m$ , o que significa que corpos de massa maior oscilam mais devagar, e  $T$  diminui quando aumenta a constante  $k$  da mola, ou seja, molas menos elásticas fazem com que o sistema oscile mais rapidamente. Note-se que o período e a frequência não dependem das condições iniciais do sistema.

## 7.2. SOMA DE OSCILADORES HARMÓNICOS

Nesta seção apresentamos mais algumas aplicações da trigonometria, nomeadamente, algumas propriedades relativas a osciladores harmónicos que têm especial importância na modelação de fenómenos periódicos, nomeadamente, na análise de ondas sonoras (cf. *Anexo V.1*).

O que acontece quando adicionamos dois osciladores harmónicos? Que tipo de curva se obtém? Será ainda um oscilador harmónico?

Para facilitar a análise das diferentes situações, vamos começar por considerar apenas funções do tipo  $y = A \text{sen}(wx + \varphi)$ ,  $A, w > 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ . Lembramos, no entanto, que a função cosseno resulta de uma translação horizontal da função seno segundo o vetor  $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , pelo que os comportamentos observados são extensíveis a qualquer combinação linear das funções seno e cosseno.

Consideremos dois osciladores harmónicos  $y_1$  e  $y_2$  com a mesma pulsção  $w$  definidos por  $f_1 = A_1 \text{sen}(wx + \varphi_1)$  e  $f_2 = A_2 \text{sen}(wx + \varphi_2)$ ,  $A_1, A_2, w > 0, \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$ .

Facilmente se observa que ao adicionar os dois osciladores harmónicos o comportamento da nova função vai depender da amplitude, da pulsção e da fase das funções iniciais. Em capítulos anteriores (cf. *Capítulo 4*), vimos que qualquer combinação de funções sinusoidais com a mesma pulsção é uma função sinusoidal com a mesma pulsção, donde resulta que a soma de dois osciladores harmónicos com a mesma pulsção é ainda um oscilador harmónico com a mesma pulsção. Tem-se que

$$f_1 + f_2 = A_1 \text{sen}(wx + \varphi_1) + A_2 \text{sen}(wx + \varphi_2) = A \text{sen}(wx + \varphi), \text{ com } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Mas e se adicionarmos osciladores com diferentes pulsções?

Consideremos, agora, dois osciladores com diferentes **pulsções** definidos por  $f_1(x) = A_1 \text{sen}(w_1x + \varphi_1)$  e  $f_2(x) = A_2 \text{sen}(w_2x + \varphi_2)$ ,  $A_1, A_2, w_1, w_2 > 0, \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$ .

A título de exemplo, considerem-se as funções

$$f_1(x) = \text{sen } x \text{ e } f_2(x) = \frac{1}{10} \text{sen}(20x).$$

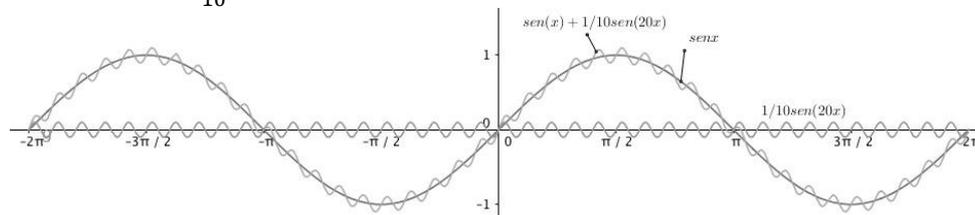


Figura 7.2 – Representação gráfica das funções  $f_1, f_2$  e  $f$

Da análise da representação gráfica das funções  $f_1$  e  $f_2$  e da função  $f = f_1 + f_2$  (cf. *Figura 7.2*) observa-se que a curva de  $f_1$  funciona como eixo Ox para a curva da função  $f_2$ , dando origem a uma nova função que, embora periódica, não é sinusoidal. Verifica-se que a pulsção, 1, e o período,  $2\pi$ , da nova função são iguais à menor das duas pulsções iniciais.

E o que acontece se adicionarmos mais que duas funções sinusoidais?

Considerem-se, agora, as funções

$$f_1(x) = \text{sen } x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \text{sen } (3x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{5} \text{sen } (5x)$$

e as respectivas representações gráficas, ilustradas na figura ao lado (cf. *Figura 7.3*).

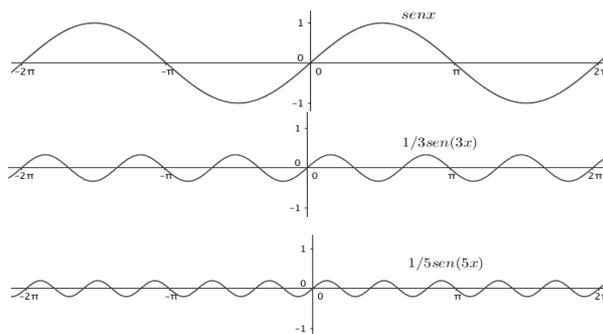


Figura 7.3 – Representação gráfica das funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$

Consideremos, também, a sucessão de funções ( $g_n$ ) com

$$g_1(x) = \text{sen } x$$

$$g_2(x) = \text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } (3x)$$

$$g_3(x) = \text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } (3x) +$$

$$\frac{1}{5} \text{sen } (5x)$$

⋮

$$g_n(x) = \text{sen } x + \dots + \frac{1}{n} \text{sen } (nx)$$

e observe-se a representação gráfica dos primeiros três termos da sucessão (cf. *Figura 7.4*).

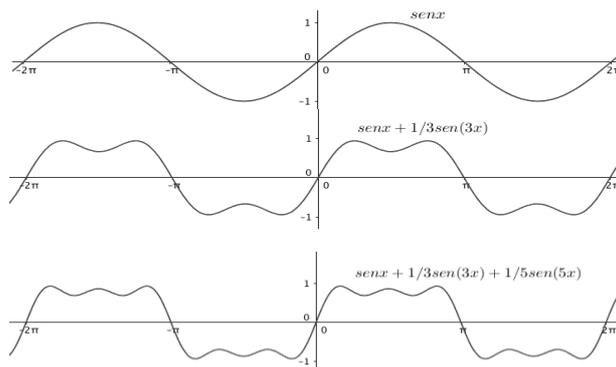


Figura 7.4 – Representação gráfica das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

Observe-se, agora, num mesmo referencial, a representação gráfica dos primeiros termos da sucessão ( $g_n$ )(cf. *Figura 7.5*).

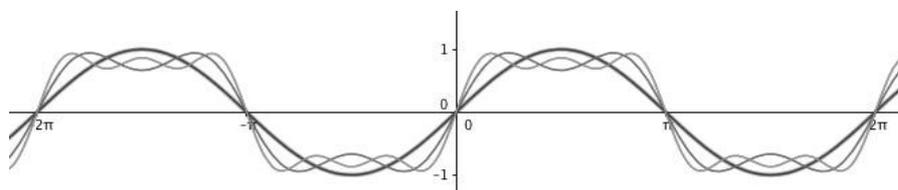


Figura 7.5 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

Comparando as três curvas, constata-se que à medida que o número de termos aumenta, a representação gráfica aproxima-se da função representada na figura seguinte, designada, habitualmente, por **função onda quadrada** (cf. *Figura 7.6*).

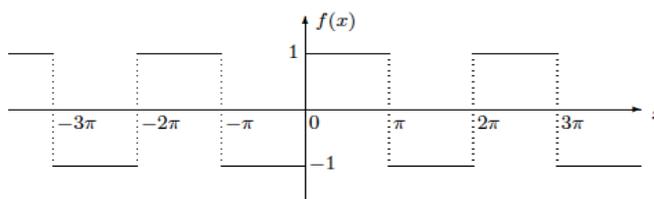


Figura 7.6 – Representação gráfica da função quadrada

Observe-se que a função quadrada é periódica e é ímpar, e que quanto maior for o número de termos de ( $g_n$ ) melhor é a aproximação a essa função. Podemos, assim, afirmar intuitivamente que a sucessão de funções ( $g_n$ ) converge e que o limite da sequência é a função  $y = f(x)$ . Tem-se, assim, que

$$f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } (3x) + \frac{1}{5} \text{sen } (5x) + \dots$$

Vejamos um outro exemplo de soma de duas ou mais funções sinusoidais.

Considere-se, agora, as funções

$$f_1(x) = \text{sen } x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \text{sen } (2x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3} \text{sen } (3x)$$

e as respectivas representações gráficas, ilustradas na figura ao lado (cf. *Figura 7.7*).

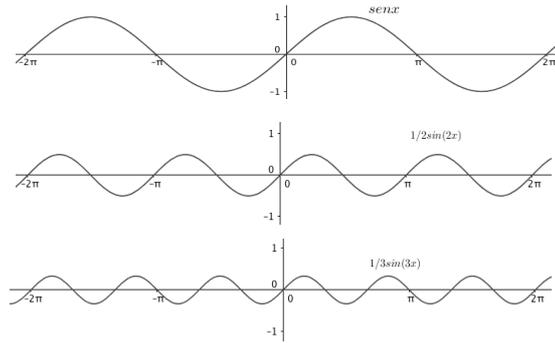


Figura 7.7– Representação gráfica das funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$

Considere-se, agora, a sucessão de funções ( $h_n$ ) com

$$g_1(x) = \text{sen } x$$

$$g_2(x) = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } (2x)$$

$$g_3(x) = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } (2x) + \frac{1}{3} \text{sen } (3x)$$

⋮

e observemos a representação gráfica dos primeiros três dos termos da sucessão (cf. *Figura 7.8*).

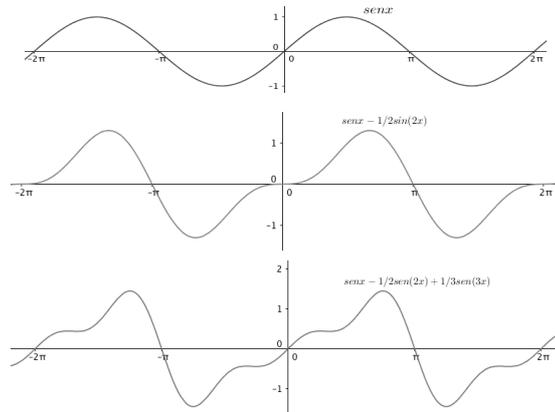


Figura 7.8 – Representação gráfica das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

À semelhança do exemplo anterior, faz-se a representação gráfica das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$ , no mesmo referencial cartesiano (cf. *Figura 7.9*).

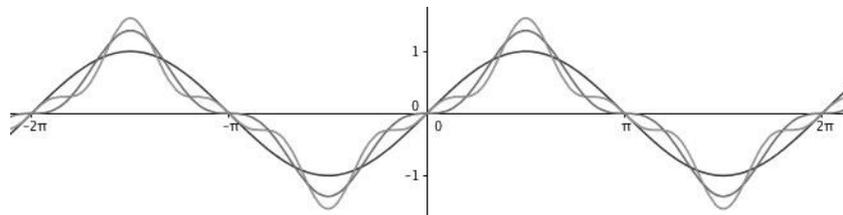


Figura 7.9 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

Comparando as três curvas, constata-se que à medida que o número de termos aumenta, a representação gráfica aproxima-se da seguinte função  $f$ , periódica e ímpar (cf. *Figura 7.10*):

No intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , prova-se que a sucessão de funções converge para a função  $y = x$ , pelo que podemos afirmar que

$$x = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } (2x) + \frac{1}{3} \text{sen } (3x) + \dots, \text{ se } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

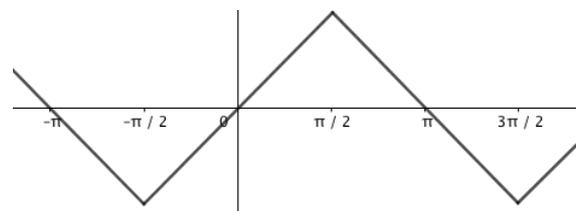


Figura 7.10 – Representação gráfica da função  $f$

A título de exemplo, vejamos o que acontece se adicionarmos funções definidas a partir da função cosseno.

Por exemplo, considere-se, agora, as funções

$$f_1(x) = \cos x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{9} \cos(3x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{25} \cos(5x)$$

e as respectivas representações gráficas, ilustradas na figura seguinte (cf. *Figura 7.11*).

Consideremos, agora, a sucessão de funções ( $g_n$ ) com

$$g_1(x) = \cos x$$

$$g_2(x) = \cos x + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

$$g_3(x) = \cos x + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x)$$

⋮

e observemos a representação gráfica dos primeiros três dos termos da sucessão (cf. *Figura 7.12*).

Faz-se, agora, num mesmo referencial, a representação gráfica dos primeiros termos da sucessão ( $g_n$ ) (cf. *Figura 7.13*).

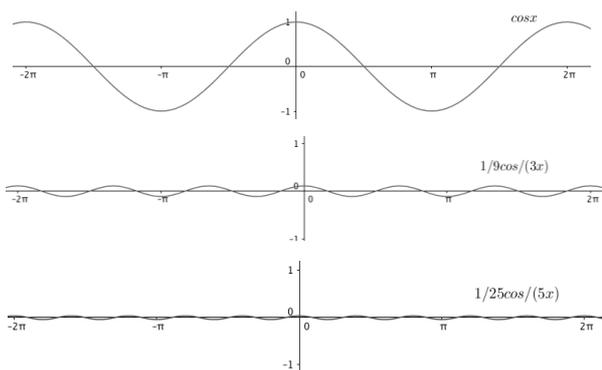


Fig.7.11 – Representação gráfica das funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$

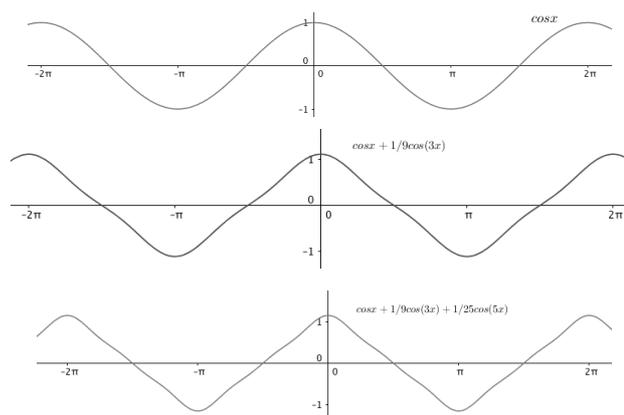


Figura 7.12 – Representação gráfica das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

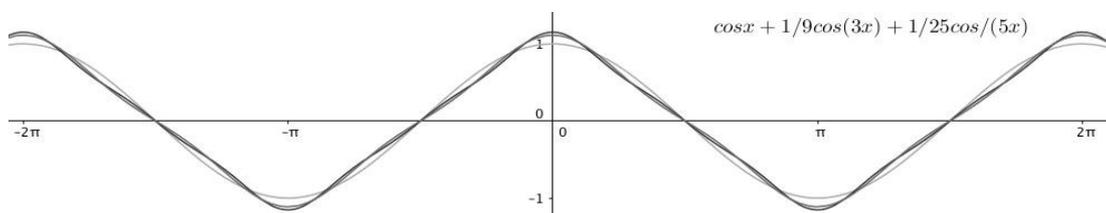


Figura 7.13 – Representação gráfica, no mesmo referencial, das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$

Comparando as três curvas, constata-se, mais uma vez, que à medida que o número de termos aumenta, a representação gráfica converge para uma função  $f$  periódica par. No intervalo  $]-\pi, \pi[$ , prova-se que a sucessão de funções converge para a função  $y = f(x)$ , pelo que podemos afirmar que

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots$$

A análise da representação gráfica das funções obtidas permite evidenciar certos aspetos da simetria das funções, em particularidade, a sua paridade. Nos exemplos que envolveram uma soma de senos, obteve-se uma função ímpar, e no caso em que envolveu uma soma de cossenos, obteve-se uma função par.

Os exemplos apresentados nesta secção traduzem casos particulares da fabulosa descoberta de Fourier<sup>42</sup>, segundo o qual, *quase* todas as funções periódicas, independentemente do seu grau de complexidade, podem ser representadas como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente.

<sup>42</sup> **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830), físico e matemático francês, dedicou-se ao estudo de fenómenos de condução de calor e ao estudo de funções periódicas recorrendo a séries trigonométricas.

De um modo geral, tem-se que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Esta soma infinita é designada por **série trigonométrica de Fourier**. A descoberta de Fourier permitiu aos matemáticos descrever qualquer função periódica recorrendo a séries trigonométricas e aos físicos modelar alguns fenómenos periódicos, nomeadamente, a modelação de fenómenos ondulatórios, cuja análise se apresenta mais pormenorizadamente em anexo (cf. *Anexo V.I*).

### ■■■■ ENCANTO 8... CURVAS FAMOSAS<sup>43</sup>

Neste encanto apresentamos um conjunto de curvas notáveis, designadas, habitualmente, por **Curvas de Lissajous**, que para além de um visual fascinante, tem inúmeras aplicações na Física, nomeadamente, no estudo de fenómenos oscilatórios (cf. *Figura 7.14*).

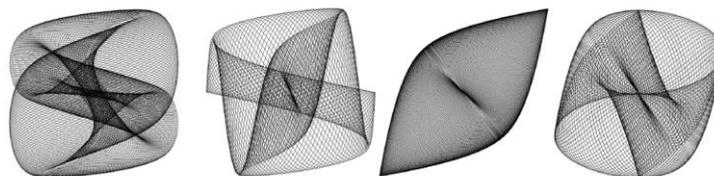


Figura 7.14 – Exemplos de curvas de Lissajous

Matematicamente, as Curvas de Lissajous são curvas  $(x(t), y(t))$  descritas parametricamente por

$$\begin{cases} x(t) = a \sin(w_1 t + \varphi_1) \\ y(t) = b \sin(w_2 t + \varphi_2) \end{cases} \text{ com } a, b, w_1, w_2 > 0 \text{ e } \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$$

em que cada componente é um oscilador harmónico.

Fazendo variar a frequência dos osciladores, a amplitude e o desfasamento entre os instantes em que cada oscilador inicia o movimento, obtém-se uma infinidade de padrões formados por linhas harmoniosas muito interessantes tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista artístico<sup>44</sup>.

#### **Mas que tipo de curvas resultam da composição de dois osciladores harmónicos?**

Imaginemos um ponto P em movimento sendo as suas coordenadas  $(x(t), y(t))$  correspondentes a movimentos harmónicos simples em torno da origem tais que

$$x(t) = a \sin(w_1 t + \varphi_1) \text{ e } y(t) = b \sin(w_2 t + \varphi_2) \text{ com } a, b, w_1, w_2 > 0 \text{ e } \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[.$$

Tem-se que a posição do ponto P no instante  $t$  é dada por

$$(x(t), y(t)) = (a \sin(w_1 t + \varphi_1), b \sin(w_2 t + \varphi_2)).$$

O movimento do ponto P descreve uma curva com características próprias, dependente das amplitudes, pulsações e fases dos osciladores harmónicos considerados. Note-se que, como  $-a \leq x(t) \leq a$  e  $-b \leq y(t) \leq b$ , a curva descrita está limitada pelo retângulo definido pelas condições  $-a \leq x \leq a$  e  $-b \leq y \leq b$ .

<sup>43</sup> **Jules Antoine Lissajous** (1822 - 1880), físico francês, realizou diversos estudos sobre o movimento vibratório e a acústica e inventou o dispositivo que permite traçar as curvas com o seu nome, curvas de Lissajous.

<sup>44</sup> Um dos primeiros dispositivos utilizado para traçar este tipo de curvas foi o **harmonógrafo**. Este dispositivo é formado por dois pêndulos que oscilam perpendicularmente entre si, um dos quais aciona uma caneta e outro move um suporte onde se coloca uma folha de papel. Fazendo variar a frequência dos pêndulos e o desfasamento entre os instantes em que cada um dos pêndulos inicia o movimento, obtém-se uma infinidade de curvas com características particulares.

Analisemos as situações em que os dois osciladores harmônicos têm a **mesma pulsação, ou seja,  $w_1 = w_2$** .

**1º Caso:**  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Tem-se que  $x(t) = a \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1)$  e  $y(t) = b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_2)$  pelo que

$$\frac{x(t)}{a} = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1) \text{ e } \frac{y(t)}{b} = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_2).$$

Como  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$  então

$$\operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_2) = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1 + 2k\pi) = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1).$$

Donde  $\frac{x(t)}{a} = \frac{y(t)}{b} \Leftrightarrow y(t) = \frac{b}{a}x(t)$  o que corresponde à equação de uma reta de declive  $\frac{b}{a}$ .

A título de exemplo, considere-se  $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) \end{cases}$ .

Tem-se  $w_1 = w_2 = 2\pi, a = b = 1$  e  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Observe-se a figura seguinte, sendo que na primeira imagem se encontra a representação gráfica do oscilador  $x(t)(=y(t))$  e na segunda imagem a curva  $(x(t), y(t)) = (x, x)$  (cf. *Figura 7.15*).

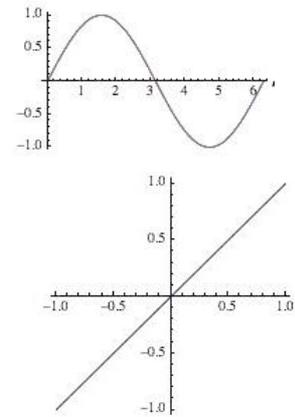


Figura 7.15 – Representação gráfica do oscilador e da respetiva curva de Lissajous

**2º Caso:**  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tem-se que  $x(t) = a \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1 + \pi)$  e  $y(t) = b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_2)$ .

Mas  $y(t) = b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1 + k\pi) = -b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1)$  pelo que

$$\frac{x(t)}{a} = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1) \text{ e } -\frac{y(t)}{b} = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1). \text{ Donde } \frac{x(t)}{a} = \frac{-y(t)}{b} \Leftrightarrow y(t) = -\frac{b}{a}x(t)$$

o que corresponde à equação de uma reta de declive  $-\frac{b}{a}$ .

A título de exemplo, considere-se  $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(2\pi t + \pi) \end{cases}$ .

Tem-se  $w_1 = w_2 = 2\pi, a = b = 1$  e  $\varphi_1 = 0$  e  $\varphi_2 = \pi$ .

Observe-se a figura seguinte, sendo que na primeira imagem se encontra a representação gráfica dos osciladores  $x(t)$  e  $y(t)$  e na segunda imagem a curva  $(x(t), y(t))$  (cf. *Figura 7.16*).

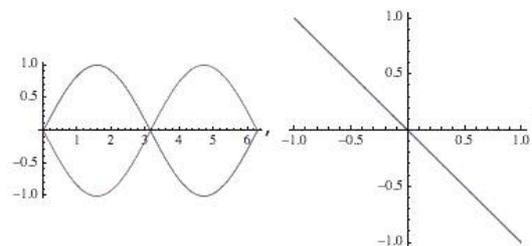


Fig.7.16 – Representação gráfica dos dois osciladores e da respetiva curva de Lissajous

**3º Caso:**  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Tem-se que  $x(t) = a \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1)$  e  $y(t) = b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_2)$ .

Mas  $y(t) = b \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = b \operatorname{cos}(w_1 t + \varphi_1)$  pelo que

$$\frac{x(t)}{a} = \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1) \text{ e } \frac{y(t)}{b} = \operatorname{cos}(w_1 t + \varphi_1).$$

Elevando, nas equações anteriores, ambos os membros ao quadrado e aplicando a Fórmula Fundamental da

Trigonometria, obtém-se  $\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = 1$ .

O movimento do ponto P será elíptico, sendo a elipse centrada na origem. No caso particular,  $a = b$ , tem-se a equação de uma circunferência de centro na origem, pelo que nessa situação o ponto P descreve um movimento circular.

A título de exemplo, considere-se

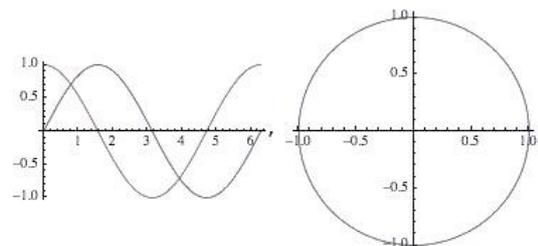


Figura 7.17 – Representação gráfica dos dois osciladores e da respetiva curva de Lissajous

$$\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tem-se  $w_1 = w_2 = 2\pi$ ,  $a = b = 1$  e  $\varphi_1 = 0$  e  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Observe-se a figura anterior, sendo que na primeira imagem se encontra a representação gráfica dos osciladores  $x(t)$  e  $y(t)$  e na segunda imagem a curva  $(x(t), y(t))$  (cf. *Figura 7.17*).

**4º Caso:**  $\varphi_2 \neq \varphi_1$  e  $\varphi_2 - \varphi_1 \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

O movimento do ponto P será elíptico, à semelhança do caso anterior, no entanto, a elipse sofre alterações na forma e respetiva orientação, dependendo da diferença entre as fases dos osciladores. Se  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  o eixo maior da elipse situa-se no primeiro quadrante e terceiro quadrantes e se  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  o eixo maior da elipse situa-se no segundo e quarto quadrantes (cf. *Figuras 7.18 e 7.19*).

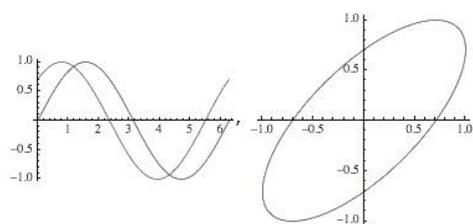


Figura 7.18 – Representação gráfica dos osciladores  
 $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$   
 e da respetiva curva de Lissajous

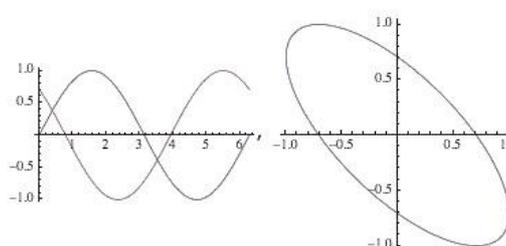


Figura 7.19 – Representação gráfica dos osciladores  
 $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2\pi t) \\ y(t) = \text{sen}\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$   
 e da respetiva curva de Lissajous

As curvas definidas por osciladores com **amplitudes diferentes, ou seja,  $w_1 \neq w_2$** , são bastante complexas e encontram-se fora do âmbito deste trabalho. No entanto, a título de exemplo, apresentamos, em anexo, um caso particular (cf. *Anexo V.2*).



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Boyer, C. *História da matemática*. Tradução: Elza Gomide. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996.
- [2] Calado, J. J. G. (1960). *Compêndio de Trigonometria*. Lisboa: Empresa literária fluminense Lda.
- [3] Corbalán, F (2010). *A proporção áurea – A linguagem matemática da beleza*. Coleção “O mundo matemático”. RBA coleccionables, S.A.
- [4] Gelfand, I.M & Saul, M. (2001). *Trigonometry*. Boston: Springer Science+ Business Media, LLC.
- [5] Katz, V. *História da Matemática*. Tradução Jorge Nuno Silva. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.
- [6] Larião, F (2009). *O desenvolvimento da trigonometria*. Dissertação de mestrado. Universidade de Lisboa.
- [7] Machado, A (2002). *Geometria – 11º Ano*. Projeto Reanimat: Fundação Calouste Gulbenkian.
- [8] Maor, E (1998). *Trigonometric Delights*. Princeton, NJ: Princeton U. P.
- [9] ME (2014). Programa e Metas Curriculares - Matemática A. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.
- [10] Nascimento, A (2005). *Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica*. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo.
- [11] Nogueira, D (2013). *Tópicos da história da trigonometria*. Dissertação de mestrado. Universidade de Aveiro.
- [12] Ostermann, A & Wanner, G (2012). *Geometry by its history*. Springer Science & Business Media.
- [13] Pereira, M (2013). *Matemática e Música – De Pitágoras aos dias de hoje*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro.
- [14] Pinto, H (2009). *História da Matemática na Sala de Aula, Ludus*.
- [15] Sanchez, L (2003). *Introdução ao estudo das funções reais de variável real – 12º Ano*. Projeto Reanimat: Fundação Calouste Gulbenkian.
- [16] Zill, D & Dewar, J (2012). *Álgebra, Trigonometría y geometría analítica*. McGraw-Hill/Interamerica editores, S.A. de C.V.

## ANEXO I

**I.1** No Capítulo 1 analisamos o conceito de seno segundo diferentes perspectivas (dependendo das condições iniciais apresentadas), estabelecendo conexões entre elas. Em particular, no Teorema 1.5, surge o conceito de seno de um ângulo a partir de diferentes elementos de um triângulo e de uma circunferência. De seguida, apresentamos a demonstração dos dois resultados auxiliares da prova do teorema referido.

**TEOREMA I.1** A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco correspondente.

**Demonstração.** Seja  $PAB$  um ângulo inscrito numa circunferência.

*1ª Situação.* Um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro da circunferência (cf. *Figura I.1*).

Considere-se o segmento de reta  $PO$  (sendo  $O$  o centro do círculo). Como  $[AO]$  e  $[PO]$  são raios do círculo, as medidas dos respectivos comprimentos são iguais, pelo que o triângulo  $[AOP]$  é isósceles. Assim,  $\widehat{APO} = \widehat{PAO} = \alpha$ .

Como o ângulo  $POB$  é um ângulo externo do triângulo  $[AOP]$  então a sua medida é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, ou seja,

$$\widehat{POB} = \alpha + \alpha = 2\alpha. \text{ Pelo que } \widehat{PB} = 2\alpha. \quad \blacksquare$$

*2ª Situação.* O centro do círculo está no interior do ângulo inscrito (cf. *Figura I.2*).

Considerando o diâmetro  $AC$ , os ângulos  $PAC$  e  $BAC$  são ângulos inscritos em que um dos lados é um diâmetro da circunferência.

$$\text{Donde } \widehat{PAC} = \frac{1}{2}\widehat{PC} \text{ e } \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BC}.$$

$$\text{Logo } \widehat{PAB} = \widehat{PAC} + \widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{PC} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{PB}. \quad \blacksquare$$

*3ª Situação.* O centro do círculo está no exterior do ângulo inscrito (cf. *Figura I.3*).

Considerando o diâmetro  $AC$ , os ângulos  $PAC$  e  $BAC$  são ângulos inscritos em que um dos lados é um diâmetro da circunferência (cf. *1ª Situação*).

$$\text{Donde } \widehat{PAC} = \frac{1}{2}\widehat{PC} \text{ e } \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BC}. \text{ Logo}$$

$$\widehat{PAB} = \widehat{PAC} - \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{PC} - \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{PB}. \quad \blacksquare$$

**TEOREMA I.2** Um triângulo inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo.

**Demonstração.** Considere-se um triângulo  $[APB]$  inscrito numa semicircunferência (cf. *Figura I.4*).

Tem-se que  $[AB]$  é um diâmetro da circunferência.

Pelo teorema anterior,  $\widehat{APB} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ$ .

Pelo que o triângulo é retângulo em  $P$ . ■

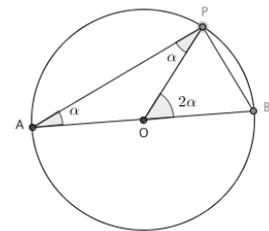


Figura I.1 – Centro do círculo pertence a um dos lados do ângulo inscrito

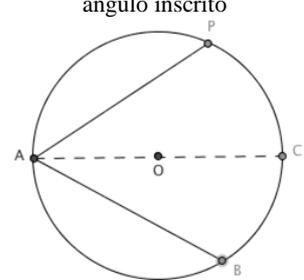


Figura I.2 - Centro do círculo no interior do ângulo inscrito

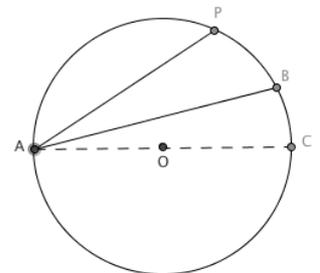


Figura I.3 - Centro do círculo no exterior do ângulo inscrito

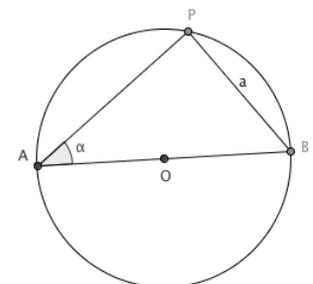


Figura I.4 – Triângulo inscrito numa semicircunferência

**I.2** Tendo por base a relação entre o seno de um ângulo interno de um triângulo interno e a respectiva área  $S$  (cf. *Teorema 1.6*) mostramos, agora, como obter novos resultados geométricos relativos a quadriláteros, ilustrado na seguinte sequência de exercícios.

**Exercício 1**

Considere-se um quadrilátero  $[ABCD]$  com diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$ . Seja  $E$  o ponto de interseção das diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$  e  $\alpha = \widehat{AEB}$  (cf. *Figura I.5*). Fixada uma unidade de comprimento, mostre que  $S_{[ABCD]} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BD} \times \text{sen } \alpha$  onde  $S$  é a área do triângulo.

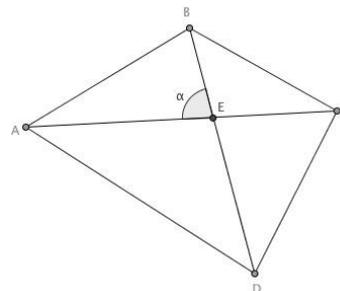


Figura I.5 – Quadrilátero

**Resolução.** Tem-se

$$\begin{aligned} S_{[AEB]} + S_{[BEC]} &= \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{BE} \times \text{sen } \alpha + \frac{1}{2} \overline{BE} \times \overline{CE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \overline{BE} \times \text{sen } \alpha \times (\overline{AE} + \overline{CE}) = \frac{1}{2} \overline{BE} \times \text{sen } \alpha \times \overline{AC}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} S_{[CED]} + S_{[AED]} &= \frac{1}{2} \overline{CE} \times \overline{DE} \times \text{sen } \alpha + \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{DE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \overline{DE} \times \text{sen } \alpha \times (\overline{CE} + \overline{AE}) = \frac{1}{2} \overline{DE} \times \text{sen } \alpha \times \overline{AC}. \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) e de (2) tem-se

$$\begin{aligned} S_{[ABCD]} &= S_{[AEB]} + S_{[BEC]} + S_{[CED]} + S_{[AED]} = \frac{1}{2} \overline{BE} \times \text{sen } \alpha \times \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{DE} \times \text{sen } \alpha \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} \times \text{sen } \alpha \times (\overline{BE} + \overline{DE}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BD} \times \text{sen } \alpha. \end{aligned}$$

■

No exercício anterior mostrou-se ser possível escrever uma expressão trigonométrica para área de um quadrilátero, recorrendo às suas diagonais e ao seno do ângulo agudo formado por elas. Dado que o seno de um ângulo e o seno do respetivo ângulo complementar são iguais a expressão continua válida caso se considere, não o ângulo agudo formado pelas diagonais, mas o respetivo ângulo obtuso.

**Exercício 2**

Considere-se um quadrilátero  $[ABCD]$  com diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$ . Seja  $E$  o ponto de interseção das diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$  e  $\alpha = \widehat{AEB}$  (cf. *Figura I.6*). Sabendo que soma das áreas dos triângulos  $[AEB]$  e  $[CED]$  é igual à soma das áreas dos triângulos  $[BEC]$  e  $[AED]$ , mostre que  $E$  é ponto médio de pelo menos uma das diagonais do quadrilátero.

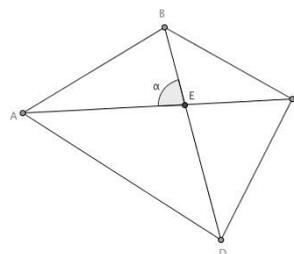


Figura I.6 – Quadrilátero  $[ABCD]$

**Resolução.** Considere-se  $S$  a área do triângulo. Tem-se que

$$\begin{aligned} S_{[AEB]} + S_{[CED]} &= \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{BE} \times \text{sen } \alpha + \frac{1}{2} \overline{CE} \times \overline{DE} \times \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \times (\overline{AE} \times \overline{BE} + \overline{CE} \times \overline{DE}) \quad \text{e} \\ S_{[BEC]} + S_{[AED]} &= \frac{1}{2} \overline{BE} \times \overline{CE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{DE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \times (\overline{BE} \times \overline{CE} + \overline{AE} \times \overline{DE}). \end{aligned}$$

Das expressões anteriores resulta que

$$\begin{aligned} S_{[AEB]} + S_{[CED]} = S_{[BEC]} + S_{[AED]} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \times (\overline{AE} \times \overline{BE} + \overline{CE} \times \overline{DE}) = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \times (\overline{BE} \times \overline{CE} + \overline{AE} \times \overline{DE}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{AE} \times \overline{BE} + \overline{CE} \times \overline{DE} = \overline{BE} \times \overline{CE} + \overline{AE} \times \overline{DE} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{AE}(\overline{BE} - \overline{DE}) - \overline{CE}(\overline{BE} - \overline{DE}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\overline{AE} - \overline{CE})(\overline{BE} - \overline{DE}) = 0 \Leftrightarrow \overline{AE} = \overline{CE} \vee \overline{BE} = \overline{DE}. \end{aligned}$$

Logo  $E$  é ponto médio de pelo menos uma das diagonais do quadrilátero. ■

**Exercício 3**

Considere-se um quadrilátero  $[ABCD]$  com diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$ . Sejam  $E$  o ponto de interseção das diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$  e  $\alpha = \widehat{AEB}$  (cf. *Figura I.7*). Fixada uma unidade de comprimento, mostre que

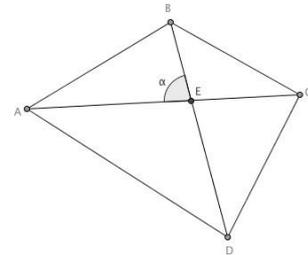


Figura I.7 – Quadrilátero  $[ABCD]$

que  $S_{[ABE]} \times S_{[CED]} = S_{[BEC]} \times S_{[AED]}$  onde  $S$  é a área do triângulo.

**Resolução**

Tem-se que

$$\begin{aligned} S_{[ABE]} \times S_{[CED]} &= \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{BE} \times \text{sen } \alpha \times \frac{1}{2} \overline{CE} \times \overline{DE} \times \text{sen } \alpha = \\ &= \frac{1}{4} \overline{AE} \times \overline{BE} \times \overline{CE} \times \overline{DE} \times \text{sen}^2 \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Como  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$  então

$$\begin{aligned} S_{[BEC]} \times S_{[AED]} &= \frac{1}{2} \overline{BE} \times \overline{CE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) \times \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{DE} \times \text{sen}(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{4} \overline{AE} \times \overline{BE} \times \overline{CE} \times \overline{DE} \times \text{sen}^2 \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) e de (2) tem-se

$$S_{[ABE]} \times S_{[CED]} = S_{[BEC]} \times S_{[AED]} . \quad \blacksquare$$

**Observação.** A relação mantém-se válida caso o ponto de interseção das diagonais seja exterior ao quadrilátero.

**I.3** No primeiro capítulo apresentamos a expressão da área do triângulo conhecidas as medidas dos comprimentos dos seus lados designada de Fórmula de Heron. De seguida, apresentamos mais duas demonstrações da Fórmula de Heron, uma algébrica e outra geométrica, que espelham abordagens alternativas de pensar sobre uma mesma figura inicial. Na primeira demonstração, o ponto de partida é o teorema de Pitágoras, constituindo a mesma uma demonstração puramente algébrica e, na segunda demonstração, obtém-se a Fórmula de Heron recorrendo a alguns resultados geométricos que têm por base duas decomposições diferentes do triângulo inicial.

**FÓRMULA DE HERON.** Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e  $s = (a + b + c)/2$ . A área,  $S$ , do triângulo  $[ABC]$  é dada pela expressão

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

**Demonstração algébrica.** Considere-se o triângulo  $[ABC]$  de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$  e de ângulos internos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  e  $\gamma = \widehat{ACB}$ . Seja  $D$  o ponto em  $[AB]$  tal que  $[CD]$  e  $[AB]$  são perpendiculares e considere-se  $d = \overline{AD}$  (cf. *Figura I.8*). Então  $\overline{DB} = c - d$ .

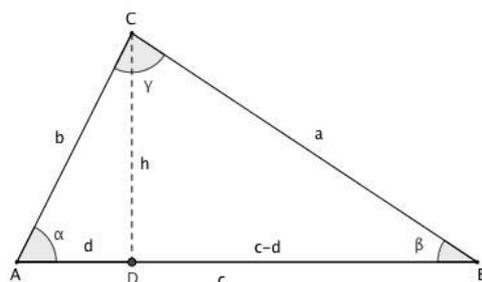


Figura I.8 – Decomposição do triângulo  $[ABC]$  pela altura relativa à base  $[AB]$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $[ADC]$  e  $[BCD]$  obtém-se,

$$a^2 = h^2 + (c - d)^2 \text{ e } b^2 = h^2 + d^2$$

Subtraindo as duas expressões,

$$a^2 - b^2 = h^2 + (c - d)^2 - h^2 - d^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2 - 2cd \Leftrightarrow d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \quad (1)$$

Como  $b^2 = h^2 + d^2$  então  $h^2 = b^2 - d^2$ , donde por (1) se obtém,

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \frac{(2c)^2 b^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2} = \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Considere-se  $s = \frac{a+b+c}{2}$  então  $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$   
 $b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$   
 $a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b).$

Substituindo em (2), obtemos

$$h^2 = \frac{2s2(s-a)2(s-b)2(s-c)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}.$$

Logo  $S = \frac{h \times c}{2} = \sqrt{\frac{c^2 4s(s-a)(s-b)(s-c)}{4c^2}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$  ■

Para a **demonstração geométrica** da Fórmula de Heron vamos recorrer ao seguinte resultado:

**TEOREMA I.3** Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{CB}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , e o ponto O, centro da circunferência inscrita no triângulo (isto é, o ponto de interseção das bissetrizes dos três ângulos do triângulo). Seja  $r$  o raio da respetiva circunferência inscrita no triângulo e  $s = (a + b + c)/2$ .

Então a área do triângulo  $[ABC]$  é  $rs$ , ou seja,  $S = rs$  onde  $S$  é a área do triângulo.

**Demonstração.** Na figura, temos uma decomposição do triângulo  $[ABC]$  em três triângulos  $[ABO]$ ,  $[BCO]$  e  $[ACO]$  (cf. *Figura I.9*), pelo que

$$\begin{aligned} S_{\Delta[ABC]} &= S_{\Delta[ABO]} + S_{\Delta[BOC]} + S_{\Delta[AOC]} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \\ &= r \left( \frac{a + b + c}{2} \right). \end{aligned}$$

Considere-se  $s = \frac{a+b+c}{2}$ , então  $S_{\Delta[ABC]} = rs.$  ■

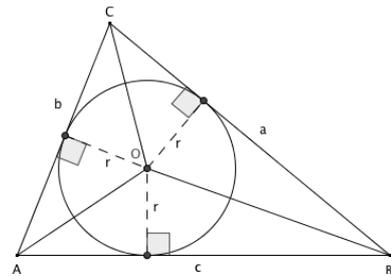


Figura I.9 – Decomposição do triângulo  $[ABC]$  em 3 triângulos

Damos então início à demonstração geométrica da Fórmula de Heron.

**Demonstração geométrica.** Considerem-se duas decomposições diferentes do triângulo  $[ABC]$ , ilustradas nas figuras que se seguem (cf. *Figuras I.10 e I.11*).

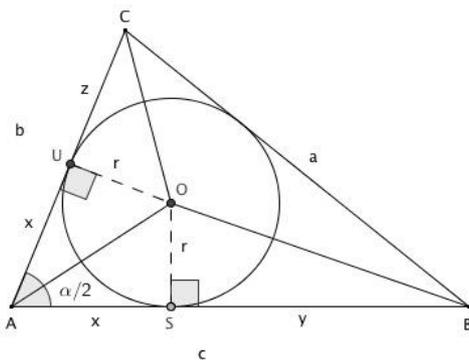


Figura I.10 - Decomposição do triângulo  $[ABC]$  em 3 triângulos

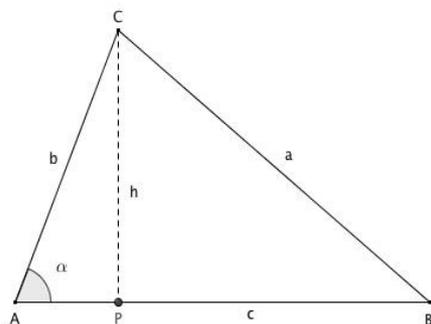


Figura I.11 - Decomposição do triângulo  $[ABC]$  pela altura relativa à base  $[AB]$

Sejam  $O, r, h, x, y$  e  $z$  como indicados nas figuras. Observe-se que  $b = x + z$  e  $c = x + y$ .

Temos que  $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$  e  $\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$  (cf. *Figura I.10*).

Temos também que  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}$  (cf. *Figura I.11*), logo  $h = b \operatorname{sen} \alpha$ .

Donde

$$h = b \operatorname{sen} \alpha = b \left( 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = b \frac{2rx}{r^2+x^2} = (x+z) \frac{2rx}{r^2+x^2}. \quad (1)$$

De (1) tem-se

$$S_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2} \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} (x+y)h = \frac{1}{2} (x+y)(x+z) \frac{2rx}{r^2+x^2}.$$

Pelo Teorema I.3

$$S_{\Delta[ABC]} = rs = \frac{1}{2} (x+y)(x+z) \frac{2rx}{r^2+x^2}, \text{ logo}$$

$$s(r^2+x^2) = x(x+y)(x+z) = x(xs+yz).$$

Assim,  $sr^2 + sx^2 = sx^2 + xyz$ , pelo que  $sr^2 = xyz$ . Assim,  $S_{\Delta[ABC]} = rs = \sqrt{s(sr^2)} = \sqrt{s(xyz)}$ .

$$\text{Considere-se } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ então } a+b-c = 2s-2c = 2(s-c) \quad (2)$$

$$c-a+b = 2s-2a = 2(s-a) \quad (3)$$

$$c+a-b = 2s-2b = 2(s-b). \quad (4)$$

Tem-se que  $a = y+z$ ,  $b = x+z$  e  $c = x+y$ .

Donde  $a+b-c = 2z$

$$a+c-b = 2y$$

$$b+c-a = 2x$$

De (2), de (3) e de (4) obtém-se  $z = s-c$ ,  $y = s-b$  e  $x = s-a$ .

Assim,  $S_{\Delta[ABC]} = \sqrt{s(xyz)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . ■

A título de curiosidade, apresentamos um resultado que traduz a aplicação da Fórmula de Heron no caso particular do triângulo equilátero.

**COROLÁRIO 1.** Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$ . A área,  $S$ , do triângulo  $[ABC]$  é dada por  $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ .

**Demonstração.** Considere-se um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$  (cf. *Figura I.12*).

Sendo  $a = \overline{CB} = \overline{AC} = \overline{AB}$  então  $s = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Donde pela Fórmula de Heron,

$$S_{\Delta[ABC]} = \sqrt{s(s-a)(s-a)(s-a)} = \sqrt{s(s-a)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3}.$$

$$\text{Ou seja, } S_{\Delta[ABC]} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

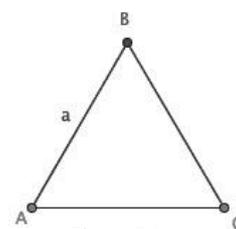


Figura I.12 –  
Triângulo equilátero

**I.4** Embora a Fórmula de Heron seja de grande utilidade, é possível calcular a área de um triângulo, sem recorrer à respetiva expressão. Apresentamos, de seguida, o cálculo da área de um triângulo por dois processos distintos.

Fixada uma unidade de comprimento, considere-se um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{CB} = 2$  e  $\overline{AC} = 3$ , como ilustrado na figura

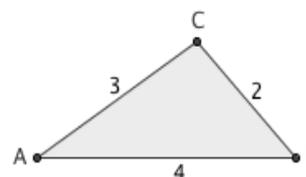


Figura I.13 – Triângulo de lados 2, 3 e 4

(cf. *Figura I.13*).

### 1ª Resolução [sem recorrer à fórmula Heron]

Seja  $h$  a altura do triângulo relativamente à base  $[AB]$ .

Seja  $\overline{AD} = d$  e  $\overline{DB} = 4 - d$  (cf. *Figura I.14*).

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $[ACD]$  e  $[BCD]$

obtém-se,

$$\begin{aligned} 2^2 &= h^2 + (4 - d)^2 & \text{e} \\ 3^2 &= h^2 + d^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Subtraindo as equações anteriores, membro a membro, vem

$$\begin{aligned} 2^2 - 3^2 &= h^2 + (4 - d)^2 - h^2 - d^2 \Leftrightarrow -5 = 16 - 8d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d = \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

Substituindo  $d = \frac{21}{8}$  em (1) obtém-se

$$\begin{aligned} 3^2 &= h^2 + \left(\frac{21}{8}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3^2 \times 8^2 - 21^2}{8^2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3^2 \times 8^2 - 3^2 \times 7^2}{8^2} \\ &\Leftrightarrow h^2 = \frac{3^2(8^2 - 7^2)}{8^2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{9 \times 15}{8^2} \Leftrightarrow h = \pm \frac{3\sqrt{15}}{8}. \end{aligned}$$

Como  $h > 0$  então  $h = \frac{3\sqrt{15}}{8}$ . Donde

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} h = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \cong 2,9.$$

### 2ª Resolução [recorrendo à fórmula de Heron]

Tem-se que

$$s = \frac{2 + 3 + 4}{2} = \frac{9}{2}.$$

Recorrendo à Fórmula de Heron

$$S = \sqrt{\frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} - 2\right) \left(\frac{9}{2} - 3\right) \left(\frac{9}{2} - 4\right)} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5 \cdot 3}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \cong 2,9.$$

Da análise das duas resoluções, constata-se uma enorme vantagem em determinar a área do triângulo recorrendo à Fórmula de Heron. Na primeira resolução, somos forçados a resolver um sistema de equações resultante da decomposição do triângulo inicial em dois triângulos retângulos. Na segunda, os procedimentos envolvem uma simples substituição das variáveis pelos respetivos valores.

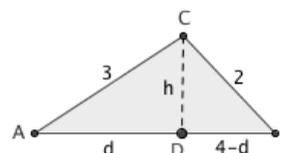


Figura I.14 – Decomposição do triângulo pela altura relativamente à base  $[AB]$

## ANEXO II

**II.1** Como vimos no Capítulo 3, das definições das razões trigonométricas de um mesmo ângulo resultam algumas relações entre elas, tendo sido apresentadas algumas identidades trigonométricas relativas à soma e à diferença dois ângulos, à duplicação e bisseção de um ângulo, a ângulos múltiplos, entre outras.

O Teorema 3.1 enuncia duas identidades trigonométricas relativas ao seno e ao cosseno da soma de dois ângulos. Apresentamos, de seguida a demonstração da fórmula do seno da adição, no caso  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta \geq 90^\circ$  (caso 2) e no caso  $\alpha > 90^\circ$  e  $\alpha + \beta$  convexo (caso 3).

**TEOREMA 3.1** Considerem-se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha + \beta$  um ângulo convexo. Então

$$[A] \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

$$[B] \quad \text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta.$$

**Demonstração (Caso 2).** Considere-se os triângulos retângulos [ABC] e [ADB] com ângulos internos  $\alpha = \widehat{CAB}$  e  $\beta = \widehat{BAD}$  sendo  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta \geq 90^\circ$ . Seja  $\overline{AD} = 1$ .

A partir da composição dos dois triângulos obtém-se um quadrilátero [ADBC], como se observa na figura (cf. *Figura II.1*).

Considere-se o segmento de reta DE perpendicular ao segmento de reta AC. Obtém-se um novo triângulo retângulo [EDA] com um ângulo interno  $180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

Vejamos que os triângulos retângulos [ABC] e [FDB] são semelhantes.

Do triângulo [ADB] resulta que

$$\widehat{ADB} = 90^\circ - \beta. \quad (1)$$

Como  $\widehat{EAD} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  então

$$\widehat{EDA} = 90^\circ - (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta - 90^\circ. \quad (2)$$

De (1) e (2) tem-se que

$$\widehat{FDB} = 90^\circ - \beta + \alpha + \beta - 90^\circ = \alpha.$$

Pelo que se conclui que os triângulos [ABC] e [FDB] são semelhantes.

Do triângulo [ADB] resulta que

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \quad (3)$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}. \quad (4)$$

Do triângulo [ABC] e de (4) resulta que

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD} \cos \beta} \Leftrightarrow \overline{BC} = \text{sen } \alpha \cos \beta.$$

Do triângulo [FDB] e de (3) resulta que

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{FD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AD} \text{sen } \beta} \Leftrightarrow \overline{FD} = \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

Assim,

$$\overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FD} = \overline{BC} + \overline{FD} = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

Pelo que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \overline{ED} = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha. \quad \blacksquare$$

**Caso 3.** Considere-se o triângulo [ABC] com ângulo interno  $\alpha = \widehat{CAB}$  sendo  $\alpha > 90^\circ$  e o triângulo retângulo [ADB] com ângulo interno  $\beta = \widehat{BAD}$  sendo  $\alpha + \beta$  convexo. Seja  $\overline{AD} = 1$ .

A partir da composição dos dois triângulos obtém-se um quadrilátero [ADBC], como se observa na figura (cf. *Figura II.2*).

Considerem-se os segmentos de reta DE e BG perpendiculares ao segmento de reta AC. Obtém-se um novo triângulo retângulo [EDA] com um ângulo interno  $180^\circ - (\alpha + \beta)$  e um novo triângulo

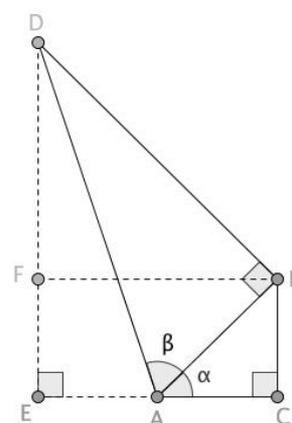


Figura II.1 - Composição de dois triângulos retângulos ( $\alpha, \beta < 90^\circ$  e  $\alpha + \beta \geq 90^\circ$ )

retângulo [BGA] com um ângulo interno  $180^\circ - \alpha$ .

Vejamos que os triângulos [DFB] e [BGA] retângulos em F e G, respetivamente, são semelhantes.

Do triângulo [EDA] resulta que

$$\widehat{E\hat{D}A} = 90^\circ - (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Do triângulo [ADB] resulta que

$$\widehat{A\hat{D}B} = 90^\circ - \beta.$$

Assim,

$$\widehat{F\hat{D}B} = 180^\circ - (90^\circ - \beta + \alpha + \beta - 90^\circ) = 180^\circ - \alpha \quad \text{e}$$

$$\widehat{F\hat{B}D} = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ.$$

Tem-se que

$$\widehat{G\hat{A}B} = \widehat{F\hat{D}B} = 180^\circ - \alpha.$$

Pelo que se conclui que os triângulos retângulos [DFB] e [BGA] são semelhantes.

Do triângulo [ADB] resulta que

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \tag{1}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}}. \tag{2}$$

Do triângulo [BGA] e de (2) resulta que

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GB}}{\operatorname{cos} \beta} \Leftrightarrow \overline{GB} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta.$$

Do triângulo [DFB] e de (1) resulta que

$$\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DF}}{\operatorname{sen} \beta} \Leftrightarrow \overline{DF} = -\operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha.$$

Como o triângulo [EDA] é retângulo em E com ângulo interno  $180^\circ - (\alpha + \beta)$  tem-se que

$$\operatorname{sen}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \overline{ED}.$$

Como

$$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF} \Leftrightarrow \overline{ED} = \overline{EF} - \overline{DF} = \overline{GB} - \overline{DF}$$

obtém-se

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \overline{ED} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha. \quad \blacksquare$$

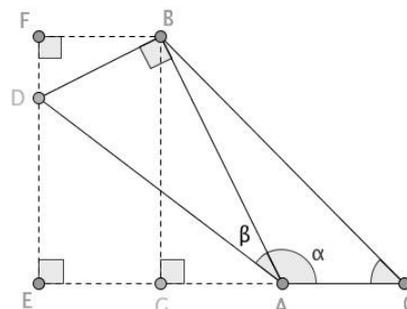


Figura II.2 - Composição de dois triângulos retângulos ( $\alpha > 90^\circ$  e  $\alpha + \beta$  convexo)

**II.2** Em secções anteriores analisámos a importância das múltiplas representações do conceito de seno. Numa análise muito pormenorizada e cuidadosa sobre as possíveis representações do seno de um ângulo, constatámos que esta razão pode ser olhada sob várias perspetivas, dependendo do contexto considerado.

De seguida, apresentamos uma demonstração alternativa da fórmula do seno da soma de dois ângulos, para o caso em que  $\alpha, \beta < 90^\circ$ , que tem por base relações trigonométricas estudadas anteriormente, nomeadamente, a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a relação entre o seno de um ângulo interno de um triângulo e a respetiva área.

**Demonstração.** Considere-se os triângulos [ABD] e [ACD] retângulos em D com ângulos internos  $\alpha = \widehat{B\hat{A}D}$  e  $\beta = \widehat{C\hat{A}D}$ , respetivamente (cf. Figura II.3). A partir da composição dos dois triângulos obtém-se um novo triângulo [ABC] com ângulo interno  $\alpha + \beta$ . Sejam  $b_1, b_2, c_1, c_2$  e  $h$  como indicados na figura.

Observe-se que  $\overline{AB} = c_1, \overline{AC} = c_2, \overline{BD} = b_1, \overline{CD} = b_2$  e  $\overline{AD} = h$ .

Tem-se que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b_1}{c_1} \tag{1} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{h}{c_1} \tag{2}$$

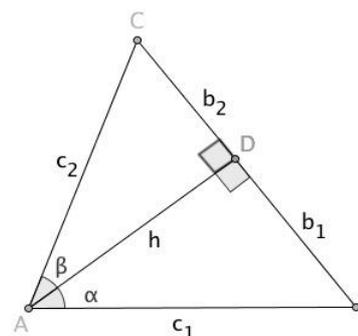


Figura II.3 – Composição de dois triângulos de ângulo interno  $\alpha + \beta$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b_2}{c_2} \quad (3) \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{h}{c_2} \quad (4)$$

De (1) e de (3) obtém-se, respetivamente,

$$b_1 = c_1 \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad b_2 = c_2 \operatorname{sen} \beta.$$

De (2) e de (4) obtém-se, respetivamente,  $h = c_1 \operatorname{cos} \alpha = c_2 \operatorname{cos} \beta$ .

$$\text{Tem-se que } S_{[ABC]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AD}}{2} = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2).$$

Obtém-se assim

$$\begin{aligned} S_{[ABC]} &= \frac{1}{2} h (c_1 \operatorname{sen} \alpha + c_2 \operatorname{sen} \beta) = \frac{1}{2} (h c_1 \operatorname{sen} \alpha + h c_2 \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \frac{1}{2} (c_2 \operatorname{cos} \beta c_1 \operatorname{sen} \alpha + c_1 \operatorname{cos} \alpha c_2 \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \frac{1}{2} c_1 c_2 (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

Sabe-se que o seno de um ângulo é igual ao quociente entre o dobro da área do triângulo e o produto das medidas dos comprimentos dos lados que formam respetivo ângulo (cf. *Teorema 1.6*). Logo

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{2S_{[ABC]}}{c_1 c_2}.$$

$$\text{Donde } S_{[ABC]} = \frac{1}{2} c_1 c_2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta). \quad (6)$$

Comparando as igualdades (5) e (6), deduz-se que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha. \quad \blacksquare$$

**II.3** No Encanto *De mãos dadas com a geometria* recorreram-se a algumas propriedades relativas a quadriláteros cíclicos para demonstrar a equivalência entre o *Teorema de Ptolomeu* e a fórmula da soma do seno de dois ângulos. De seguida, apresentamos a demonstração do Teorema 3.4 e de uma das implicações do Teorema de Ptolomeu.

**TEOREMA 3.4** Um quadrilátero é cíclico se e só se os seus ângulos opostos são suplementares.

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ) Vamos mostrar que se um quadrilátero é cíclico então os ângulos opostos são suplementares.

Considere-se um quadrilátero cíclico [ABCD] (cf. *Figura II.4*).

$$\text{Tem-se que } \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} \quad \text{e} \quad \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}.$$

$$\text{Donde } \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) = 180^\circ.$$

Analogamente, prova-se que  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ .

( $\Leftarrow$ ) Vamos mostrar que se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares então o quadrilátero é cíclico.

$$\text{Considere-se um quadrilátero [ABCD] tal que } \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ. \quad (1)$$

Considere-se a circunferência que passa pelos pontos A, B e C (três pontos não colineares).

$$\text{Tem-se que } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}. \quad \text{Logo } \widehat{ABC} = 360^\circ - \widehat{AC} = 360^\circ - 2\widehat{ABC}. \quad (2)$$

$$\text{De (1) e de (2) obtém-se } \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{CDA}.$$

Dado que a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco correspondente, tem-se que o ponto D pertence à circunferência.

Logo o quadrilátero é cíclico. \blacksquare

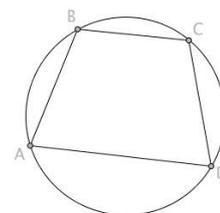


Figura II.4 - QC

Apresentamos, de seguida, a **demonstração da implicação direta do Teorema de Ptolomeu**.

**TEOREMA DE PTOLOMEU.** Fixada uma unidade de comprimento, um quadrilátero  $[ABCD]$  é cíclico se e só se o produto das medidas dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos comprimentos dos lados opostos, ou seja,

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}.$$

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ) Considere-se um quadrilátero cíclico  $[ABCD]$ . Sejam  $[AC]$  e  $[BD]$  as respectivas diagonais (cf. *Figura II.5*). Considere-se, ainda, um ponto  $E$  sobre a diagonal  $[AC]$  tal que  $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ . Observe que se obtém uma das seguintes situações:

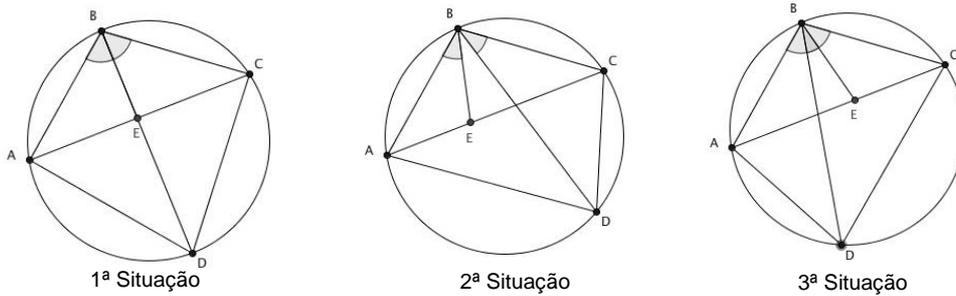


Figura II.5 – Quadrilátero cíclico

Na primeira situação,  $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ , na segunda,  $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$  e na terceira,  $\widehat{ABD} < \widehat{CBD}$ . Na primeira situação, o teorema resulta diretamente da Identidade de Ptolomeu. Vamos, por isso, analisar as restantes situações. Como, em ambos os casos, uma das amplitudes é superior à outra, sem perda de generalidade, vamos demonstrar a segunda situação.

Vejamos que os triângulos  $[ABE]$  e  $[CBD]$  são semelhantes. Por definição do ponto  $E$ , tem-se que  $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ . Sabe-se que ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais pelo que  $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ . Donde se conclui que os triângulos  $[ABE]$  e  $[CBD]$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \overline{AE} \times \overline{DB} = \overline{DC} \times \overline{AB}. \tag{1}$$

Vejamos, agora, que os triângulos  $[ABD]$  e  $[EBC]$  são semelhantes. Por definição do ponto  $E$ , tem-se que  $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ . Pelo que  $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$ . Sabe-se que ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais pelo que  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ . Como  $\widehat{ACB} = \widehat{ECB}$  então  $\widehat{ADB} = \widehat{ECB}$ . Donde se conclui que os triângulos  $[ABD]$  e  $[EBC]$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{EC} \times \overline{DB} = \overline{AD} \times \overline{CB}. \tag{2}$$

De (1) e de (2) obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{AE} \times \overline{DB} + \overline{EC} \times \overline{DB} &= \overline{DC} \times \overline{AB} + \overline{AD} \times \overline{CB} \Leftrightarrow (\overline{AE} + \overline{EC}) \times \overline{DB} = \overline{DC} \times \overline{AB} + \overline{AD} \times \overline{CB} \\ &\Leftrightarrow \overline{AC} \times \overline{DB} = \overline{AB} \times \overline{DC} + \overline{BC} \times \overline{AD}. \end{aligned}$$

$\overline{AD}$ . ■

**II.4** De seguida, apresentamos uma demonstração alternativa da fórmula do seno da adição e da subtração de dois ângulos, tendo por base o Teorema de Ptolomeu.

**Demonstração (adição).** Vamos mostrar que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha$$

Considere-se os triângulos retângulos  $[ABC]$  e  $[ADC]$  com ângulos internos  $\alpha = \widehat{CAD}$  e  $\beta = \widehat{BAC}$  sendo  $\alpha, \beta < 90^\circ$  e tal que  $\overline{AC} = 1$  (cf.

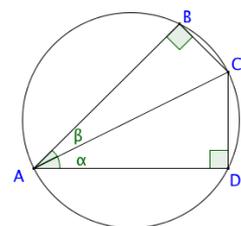


Figura II.6 – QC inscrito numa circunferência

Figura II.6). A partir da composição dos dois triângulos, como se observa na figura, obtém-se um quadrilátero [ABCD].

Tem-se que  $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , logo os ângulos opostos do quadrilátero são suplementares. Observe-se que atendendo à figura construída  $\alpha + \beta + \widehat{BCD} = 180^\circ$ .

Do Teorema 4 resulta que o quadrilátero [ABCD] é cíclico (cf. Figura II.7). Logo pelo teorema de Ptolomeu, tem-se que

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD} \quad (1)$$

Pelo resultado basilar, tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \text{sen } \beta & \overline{CD} &= \text{sen } \alpha & \overline{BD} &= \text{sen } (\alpha + \beta). \\ \overline{AC} &= \text{sen}(90^\circ) & \overline{AB} &= \text{sen}(90^\circ - \beta) & \overline{AD} &= \text{sen}(90^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Logo, substituindo em (1) obtém-se

$$\text{sen}(90^\circ) \times \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(90^\circ - \beta) \times \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \times \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{cos } \beta \times \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \times \text{cos } \alpha$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \text{cos } \alpha. \quad \blacksquare$$

### Demonstração (subtração).

Vamos mostrar que  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \beta \text{cos } \alpha$ .

Considere-se o quadrilátero [ABCD] inscrito numa circunferência de diâmetro 1 tal que o lado [AD] coincide com o diâmetro. Sejam [AC] e [BD] as respectivas diagonais. Considere-se  $\alpha = \widehat{BAD}$  e  $\beta = \widehat{CAD}$  (cf. Figura II.8).

Observe-se que  $\alpha - \beta$  é um dos ângulos internos do triângulo [ABC] e que os triângulos [ABD] e [ACD] são retângulos em B e C, respectivamente, dado que estão inscritos numa semicircunferência.

Como  $\overline{AD} = 1$  então

$$\text{cos } \alpha = \overline{AB} \text{ e } \text{cos } \beta = \overline{AC}.$$

Sabe-se que dado um triângulo inscrito numa circunferência, o quociente entre a medida do comprimento do lado oposto,  $a$ , ao ângulo  $\alpha$  e a medida do comprimento do diâmetro,  $d$ , da circunferência circunscrita ao triângulo é igual ao seno do ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\text{sen } \alpha = \frac{a}{d}$ .

Assim, como o diâmetro é igual a 1, tem-se que

$$\text{sen } \alpha = \overline{BD}, \text{sen } \beta = \overline{CD} \text{ e } \text{sen}(\alpha - \beta) = \overline{BC}.$$

Do Teorema de Ptolomeu resulta que o produto das medidas dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos comprimentos dos lados opostos, ou seja,

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}.$$

Pelo que

$$\text{cos } \beta \text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \text{sen } \beta + \text{sen}(\alpha - \beta) \times 1 \Leftrightarrow \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \beta \text{cos } \alpha. \quad \blacksquare$$

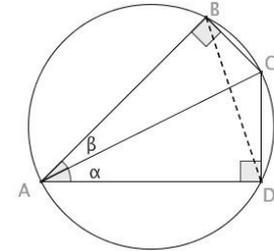


Figura II.7 - QC

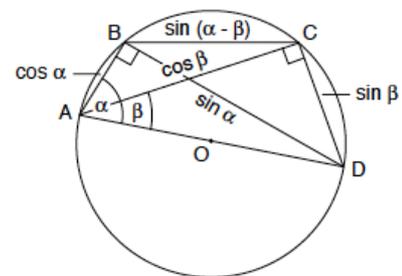


Figura II.8 - Quadrilátero inscrito numa circunferência (retirado de *Trigonometric Delights* [8])

**II.5** O estudo dos polígonos regulares permite determinar as razões trigonométricas exatas de vários ângulos. No capítulo 1, recorrendo ao quadrado e ao triângulo equilátero, determinámos as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $60^\circ$ . Mostramos, agora, como determinar as razões trigonométricas do ângulo de amplitude  $36^\circ$  recorrendo a um pentágono regular.

Considere-se, fixada uma unidade de comprimento, o pentágono regular [ABCDE], de lados de medida de comprimento 1 (cf. Figura II.9).

Sejam [BE] e [BD] duas diagonais do pentágono. Obtém-se o triângulo isósceles [BDE].

Considere-se o pentágono regular inscrito numa circunferência. Tem-se que  $\widehat{ED} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .

Como a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco correspondente então

$\widehat{EBD} = 36^\circ$ . Como  $\widehat{EBD} = 36^\circ$  então  $\widehat{BED} = \widehat{EDB} = 72^\circ$ .

Seja DF a bissetriz do ângulo EDB. Obtém-se o triângulo DEF. Como  $\widehat{BED} = 72^\circ$  e  $\widehat{EDF} = 36^\circ$  então  $\widehat{EFD} = 72^\circ$ . Como os triângulos BDE e DEF têm dois ângulos geometricamente iguais são semelhantes. Pelo que as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, ou seja,

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \quad (1)$$

Como os triângulos DEF e BDF são isósceles e  $\overline{ED} = 1$  então  $\overline{DF} = \overline{FB} = 1$ . Tem-se  $\overline{EF} = \overline{EB} - 1$ .

De (1)

$$\frac{\overline{EB}}{1} = \frac{1}{\overline{EB} - 1} \Leftrightarrow \overline{EB}^2 - \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{EB}^2 - \overline{EB} - 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como  $\overline{EB} > 0$  então  $\overline{EB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . (2)

A razão  $\frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \overline{EB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é designada por **número de ouro**<sup>45</sup> e representa-se pela letra grega  $\phi$  (fi).

Aplicando a lei dos senos ao triângulo BDE e a fórmula do seno do dobro de um ângulo, obtém-se

$$\frac{\text{sen}(36^\circ)}{1} = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{2 \text{sen}(36^\circ) \cos(36^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)} = 2 \cos(36^\circ). \quad (3)$$

De (2) e de (3) tem-se  $2 \cos(36^\circ) = \phi \Leftrightarrow \cos(36^\circ) = \frac{1}{2} \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

Conhecido o valor de  $\cos(36^\circ)$  e aplicando a fórmula fundamental da trigonometria obtém-se

$$\text{sen}(36^\circ) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \phi\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Observe-se que a partir das razões trigonométricas do ângulo de amplitude  $36^\circ$  é possível obter a amplitude de outros ângulos, por exemplo,  $18^\circ$ .

Recorrendo à fórmula do seno e do cosseno da metade de um ângulo tem-se

$$\text{sen}(18^\circ) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\text{cos}(18^\circ) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Aplicando um processo de recorrência, conhecidos os valores do seno e do cosseno de  $18^\circ$ , podemos, agora, calcular os valores do seno de outros ângulos:  $\frac{1}{2} 18^\circ, \frac{1}{4} 18^\circ, \frac{1}{8} 18^\circ, \dots$

Obtém-se assim:

se  $n = 1$  então

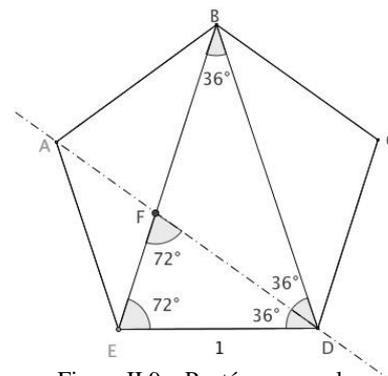


Figura II.9 – Pentágono regular

<sup>45</sup> O **número de ouro** foi uma descoberta os gregos da época clássica e a sua história encontra-se documentada no famoso livro *Elementos de Euclides*. Ao longo do tempo teve diferentes designações: número de ouro, número divino, divina proporção, proporção transcendente.

$$\operatorname{sen} \left( \frac{18^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(18^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

se  $n = 2$  então

$$\operatorname{sen} \left( \frac{18^\circ}{4} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{18^\circ}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}}$$

Donde se deduz  $\operatorname{sen} \left( \frac{18^\circ}{2^n} \right) = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + \dots + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}}}{2}$ , com  $n + 2$  raízes quadradas.

## ANEXO III

**III.1** No capítulo 4 vimos como determinar a área compreendida entre a curva da função seno e o eixo  $Ox$ , no intervalo  $[0, \pi]$ . Para obter o resultado pretendido, recorreu-se a um resultado relativo à soma do seno de ângulos múltiplos de um dado ângulo (cf. *Teorema 4.15*). De seguida, apresenta-se a demonstração do respetivo teorema.

**TEOREMA 4.15.** 
$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (2x) + \dots + \operatorname{sen} (nx) = \frac{\operatorname{sen} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} x \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}.$$

**Demonstração.** Começamos por apresentar um resultado relativo a somas telescópicas.

Uma soma diz-se **telescópica** se é da forma

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}), \quad k \leq n, k, n \in \mathbb{N}.$$

Como cada um dos termos é adicionado e subtraído uma vez, é imediato que

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Observa-se que uma soma telescópica é facilmente calculável.

Considere-se  $A = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (2x) + \operatorname{sen} (3x) + \dots + \operatorname{sen} (nx)$ .

Vamos transformar  $A$  numa soma telescópica.

Multiplicando ambos os membros da equação por  $2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)$ . Tem-se que

$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) A = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} (2x) + \dots + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} (nx). \quad (1)$$

Aplicando as fórmulas de transformação logarítmica a cada uma das parcelas, cada produto fica transformado numa soma e tem-se

$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} x = \cos \left( \frac{x}{2} \right) - \cos \left( \frac{3x}{2} \right)$$

$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} (2x) = \cos \left( \frac{3x}{2} \right) - \cos \left( \frac{5x}{2} \right)$$

⋮

$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} (nx) = \cos \left( \left( n - \frac{1}{2} \right) x \right) - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right).$$

Substituindo em (1)

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) A &= \cos \left( \frac{x}{2} \right) - \cos \left( \frac{3x}{2} \right) + \cos \left( \frac{3x}{2} \right) - \cos \left( \frac{5x}{2} \right) + \dots + \cos \left( \left( n - \frac{1}{2} \right) x \right) - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \cos \left( \frac{x}{2} \right) - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando, novamente, as fórmulas de transformação logarítmica em (2), obtém-se

$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \cdot A = 2 \operatorname{sen} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} x \right) \Leftrightarrow A = \frac{\operatorname{sen} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} x \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}.$$

Logo

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (2x) + \operatorname{sen} (3x) + \cdots + \operatorname{sen} (nx) = \frac{\operatorname{sen} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} x \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}. \quad (3) \blacksquare$$

De forma análoga, obtém-se uma fórmula para a soma de cossenos de ângulos múltiplos de  $\alpha$ ,

$$\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} (2x) + \operatorname{cos} (3x) + \cdots + \operatorname{cos} (nx) = \frac{\operatorname{cos} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n}{2} x \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)} \quad (4)$$

e, dividindo a fórmula (3) pela fórmula (4) obtém-se a fórmula,

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (2x) + \operatorname{sen} (3x) + \cdots + \operatorname{sen} (nx)}{\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} (2x) + \operatorname{cos} (3x) + \cdots + \operatorname{cos} (nx)} = \operatorname{tg} \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x \right).$$

**III.2** No capítulo 4 enunciamos alguns resultados relativos à combinação linear de funções sinusoidais com a mesma pulsação (cf. *Teoremas 4.16 e 4.17*). Apresentamos, de seguida, as demonstrações desses teoremas.

**Teorema 4.16** Sejam  $f(x) = a_1 \operatorname{sen} (bx + c_1)$  e  $g(x) = a_2 \operatorname{sen} (bx + c_2)$  duas funções sinusoidais com a mesma pulsação. Então a soma das duas funções é, ainda, uma função sinusoidal com a mesma pulsação, ou seja,

$$a_1 \operatorname{sen} (bx + c_1) + a_2 \operatorname{sen} (bx + c_2) = a_3 \operatorname{sen} (bx + c_3), \forall x \in \mathbb{R}, a_i, b, c_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

**Demonstração.** Considere-se  $f(x) = a_1 \operatorname{sen} (bx + c_1)$  e  $g(x) = a_2 \operatorname{sen} (bx + c_2)$ .

Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a_1 \operatorname{sen} (bx + c_1) + a_2 \operatorname{sen} (bx + c_2) = \\ &= a_1 \operatorname{sen} (bx) \operatorname{cos} (c_1) + a_1 \operatorname{cos} (bx) \operatorname{sen} (c_1) + a_2 \operatorname{sen} (bx) \operatorname{cos} (c_2) + a_2 \operatorname{cos} (bx) \operatorname{sen} (c_2) = \\ &= \operatorname{sen} (bx) (a_1 \operatorname{cos} (c_1) + a_2 \operatorname{cos} (c_2)) + \operatorname{cos} (bx) (a_1 \operatorname{sen} (c_1) + a_2 \operatorname{sen} (c_2)). \end{aligned}$$

Tem-se que  $f + g$  é combinação linear de  $\operatorname{sen} (bx)$  e de  $\operatorname{cos} (bx)$ , ou seja,

$$f(x) + g(x) = A \operatorname{sen} (bx) + B \operatorname{cos} (bx), \text{ com}$$

$$A = a_1 \operatorname{cos} (c_1) + a_2 \operatorname{cos} (c_2) \text{ e } B = a_1 \operatorname{sen} (c_1) + a_2 \operatorname{sen} (c_2).$$

Pelo teorema 4.15, conclui-se que  $f + g$  é uma função sinusoidal com a mesma pulsação. ■

**Teorema 4.17** Uma combinação linear de  $y = \operatorname{sen} (bx + c)$  e de  $y = \operatorname{cos} (bx + c)$  é uma combinação linear de  $y = \operatorname{sen} (bx)$  e  $y = \operatorname{cos} (bx)$ , ou seja,

$$a_1 \operatorname{sen} (bx + c) + a_2 \operatorname{cos} (bx + c) = a_3 \operatorname{sen} (bx) + a_4 \operatorname{cos} (bx), \forall x \in \mathbb{R}, a_i, b, c \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

**Demonstração.**

Considere-se a combinação linear:  $a_1 \operatorname{sen} (bx + c) + a_2 \operatorname{cos} (bx + c)$ .

Aplicando a fórmula do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, obtém-se

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{sen} (bx + c) + a_2 \operatorname{cos} (bx + c) &= \\ &= a_1 \operatorname{sen} (bx) \operatorname{cos} (c) + a_1 \operatorname{cos} (bx) \operatorname{sen} (c) + a_2 \operatorname{cos} (bx) \operatorname{cos} (c) - a_2 \operatorname{sen} (bx) \operatorname{sen} (c) = \\ &= \operatorname{sen} (bx) (a_1 \operatorname{cos} (c) - a_2 \operatorname{sen} (c)) + \operatorname{cos} (bx) (a_1 \operatorname{sen} (c) + a_2 \operatorname{cos} (c)). \end{aligned}$$

Considere-se  $a_3 = a_1 \operatorname{cos} (c) - a_2 \operatorname{sen} (c)$  e  $a_4 = a_1 \operatorname{sen} (c) + a_2 \operatorname{cos} (c)$  tem-se

$$a_1 \operatorname{sen} (bx + c) + a_2 \operatorname{cos} (bx + c) = a_3 \operatorname{sen} (bx) + a_4 \operatorname{cos} (bx). \quad \blacksquare$$

**III.3** No capítulo 4 enunciamos alguns resultados relativos às funções trigonométricas inversas. De seguida, mostramos como determinar a função inversa de uma dada função trigonométrica.

Vamos determinar a expressão analítica, o domínio e o contradomínio da função inversa de

$$y = 1 + \operatorname{sen}(3x - 2), \quad x \in \left[ \frac{4-\pi}{6}, \frac{4+\pi}{6} \right].$$

Vamos começar por determinar a expressão analítica. Tem-se

$$\begin{aligned} y = 1 + \operatorname{sen}(3x - 2) &\Leftrightarrow y - 1 = \operatorname{sen}(3x - 2) \Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(y - 1) = 3x - 2. \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(y - 1) + 2 = 3x \Leftrightarrow \frac{\operatorname{arcsen}(y - 1) + 2}{3} = x. \end{aligned}$$

Pelo que  $f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(x-1)+2}{3}$ .

O domínio de  $f^{-1}$  é dado por  $D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x - 1 \leq 1\} = [0, 2]$ .

O contradomínio de  $f^{-1}$  é dado por  $D'_{f^{-1}} = \left[ \frac{4-\pi}{6}, \frac{\pi+4}{6} \right]$ .

## ANEXO IV

**IV.1** Para além da determinação de alguns limites, no Capítulo 6 determinámos as derivadas das funções trigonométricas. Estas derivadas têm especial importância na demonstração de alguns resultados relativos à soma de funções sinusoidais.

De seguida, apresentamos a demonstração da implicação direta do Teorema 4.18 com base nas derivadas das funções trigonométricas que enunciamos numa forma simplificada.

**TEOREMA 4.18** Considerem-se duas funções sinusoidais

$$f(x) = \text{sen}(ax) \text{ e } g(x) = \text{sen}(bx), \forall x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então a soma das funções  $f$  e  $g$  é uma função periódica se e só se  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ .

Começemos por demonstrar a seguinte propriedade:

**Teorema IV.1** Considere-se  $f$  uma função real de variável real de domínio  $D$  e  $T > 0$ .

Se a função  $f$  é diferenciável em  $D$  e é  $T$ -periódica então a função  $f'$  é  $T$ -periódica.

**Demonstração.** Por definição,  $f'$  é  $T$ -periódica se, para todo o  $x, x + T \in D$ ,  $f'(x + T) = f'(x)$ .

Aplicando a definição de derivada num ponto e tendo em conta que  $f$  é  $T$ -periódica tem-se

$$f'(x + T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + T + h) - f(x + T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

■

Retomemos a demonstração do teorema.

**Demonstração.**

[ $\Rightarrow$ ] Considere-se  $h(x) = f(x) + g(x) = \text{sen}(ax) + \text{sen}(bx)$  uma função  $T$ -periódica com  $a \neq b, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como vimos anteriormente, as funções seno e cosseno são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ , pelo que a sua soma também é diferenciável. Conclui-se que a função  $h$  é diferenciável e como  $h'(x) = a \cos(ax) + b \cos(bx)$ , também  $h'$  é diferenciável. Assim, pelo Teorema IV.1, como a função  $h$  é  $T$ -periódica e é diferenciável, também as funções  $h'$  e  $h''$  são  $T$ -periódicas, em particular, tem-se

$$h(0 + T) = h(0) \Leftrightarrow h(T) = h(0) = 0 \tag{1}$$

$$h''(0 + T) = h''(0) \Leftrightarrow h''(T) = h''(0). \tag{2}$$

Aplicando as regras de derivação, obtém-se

$$h''(x) = -a^2 \text{sen}(ax) - b^2 \text{sen}(bx).$$

Logo  $h''(0) = 0$ .

De (1) e de (2) vem

$$\begin{aligned} \begin{cases} \text{sen}(aT) + \text{sen}(bT) = 0 \\ -a^2 \text{sen}(aT) - b^2 \text{sen}(bT) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(bT) \\ a^2 \text{sen}(bT) - b^2 \text{sen}(bT) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(bT) \\ (a^2 - b^2) \text{sen}(bT) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(bT) \\ a^2 - b^2 = 0 \vee \text{sen}(bT) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tem-se

$$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

Por um lado, tem-se  $a \neq b$ , e por outro, se  $a = -b$  então

$$h(x) = \text{sen}(ax) + \text{sen}(-ax) = \text{sen}(ax) - \text{sen}(ax) = 0, \text{ o que é o caso trivial.}$$

Considere-se, agora, o caso remanescente

$$\begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(bT) \\ \text{sen}(bT) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(bT) \\ bT = k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = -\text{sen}(k_1\pi) \\ bT = k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(aT) = 0 \\ bT = k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aT = k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z} \\ bT = k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = \frac{k_2\pi}{a}, k_2 \in \mathbb{Z} \\ T = \frac{k_1\pi}{b}, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donde

$$\frac{k_1\pi}{b} = \frac{k_2\pi}{a} \Leftrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}. \quad \blacksquare$$

**IV.2** No capítulo 6, deduzimos alguns limites, nomeadamente, o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$ , tendo por base a continuidade<sup>46</sup> das funções trigonométricas. Apresentamos, de seguida, a demonstração do respetivo teorema.

**Teorema 6.1**

[A] A função seno é contínua em  $\mathbb{R}$ .

[B] A função cosseno é contínua em  $\mathbb{R}$ .

[C] A função tangente é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Demonstração.**

[A] Vamos mostrar que a função seno é contínua em todos os pontos do seu domínio recorrendo à relação entre a amplitude de um ângulo expressa em radianos e o respetivo seno e às fórmulas de transformação logarítmica.

Considere-se a função  $f(x) = \text{sen } x$  de domínio  $\mathbb{R}$ .

A função  $f$  é contínua em  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , se

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |\text{sen } x - \text{sen } a| < \delta.$$

Vejamos que  $\text{sen } x \leq x \leq \text{tg } x, \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Considere-se uma circunferência de centro  $O$  e raio 1,  $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  e a amplitude de  $x$  expressa em radianos (cf. *Figura IV.1*). Seja  $D$  o ponto de interseção da circunferência com o lado extremidade do ângulo e  $C$  a projeção ortogonal do ponto  $D$  na reta  $OA$ . Considere-se, ainda,  $B$  o ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a reta tangente à circunferência no ponto  $(1,0)$ .

Sabe-se que  $x$  é o comprimento do arco  $AD$ . Tem-se, ainda, que  $\overline{AB} = \text{tg } x$  e  $\overline{CD} = \text{sen } x$ .

Donde

$$\text{sen } x \leq x \leq \text{tg } x.$$

Se  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  então  $-x > 0$  pelo que  $\text{sen}(-x) < -x$ .

Tem-se que  $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$  logo

$$-\text{sen } x < -x \Leftrightarrow \text{sen } x > x.$$

Assim,  $|\text{sen } x| \leq |x|, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,

Aplicando as fórmulas de transformação logarítmica vem

$$|f(x) - f(a)| = |\text{sen } x - \text{sen } a| = \left| 2 \text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right) \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) \right|.$$

Como  $|\text{sen } x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$\left| \text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x-a}{2} \right|.$$

Logo

$$|f(x) - f(a)| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \text{ dado que } \left| \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) \right| \leq 1.$$

Donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

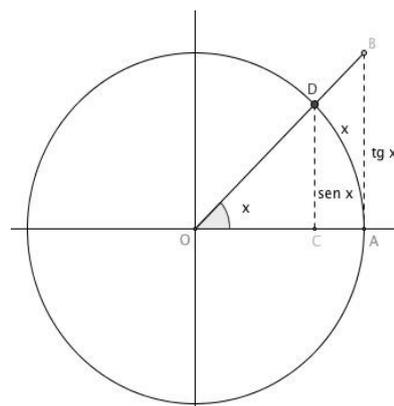


Figura IV.1 – Círculo trigonométrico

<sup>46</sup> Uma função  $f$  real de variável real é **contínua em  $a$** ,  $a \in D_f$  se  $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$ .

Tomando  $\varepsilon = \delta$  se  $|x - a| < \delta$  vem

$$|f(x) - f(a)| < \delta.$$

Conclui-se, assim, que a função seno é contínua em  $\mathbb{R}$ .

Analogamente demonstra-se a continuidade da função cosseno e da função tangente recorrendo a alguns resultados já estudados.

**[B]** Considere-se a função trigonométrica  $f(x) = \cos x$  cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . Recorrendo às relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, tem-se  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , pelo que a função cosseno é contínua em todo o seu domínio.

**[C]** Considere-se, agora, a função trigonométrica  $f(x) = \operatorname{tg} x$  cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Sabe-se que  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  logo a função tangente é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  dado que é o quociente de duas funções contínuas. ■

## ANEXO V

**V.1** Como referido no Capítulo 7, as funções trigonométricas, em particular, as funções seno e cosseno, adquiriram especial importância na Matemática, quando o matemático Fourier mostrou que qualquer função, sob determinadas condições, pode ser obtida como o limite de uma série cujos termos são senos e/ou cossenos. Este facto contribuiu para o desenvolvimento de um ramo da matemática, hoje, designado de **análise harmónica** (ou análise de Fourier) que estuda a representação de funções como a sobreposição de ondas.

Neste tópico apresentamos o contributo da análise de Fourier para a análise de ondas sonoras, em particular, para a explicação da diferença de timbres produzidos por diferentes instrumentos musicais, tendo por base o texto de Marcos do Carmo Pereira [13].

O som é uma onda material que ao atingir o ouvido humano provoca vibrações no tímpano originando sensações auditivas; constitui, por isso, um fenómeno que se propaga por ondas (ondas sonoras). O modelo matemático mais simples que traduz um som **puro** (ou simples ou harmónico) é uma função do tipo  $f(x) = A \text{sen}(wt)$ , sendo  $A$  a amplitude da onda sonora e  $w$  a respetiva pulsação. As características do som podem, assim, ser estudadas em função das propriedades da representação gráfica da respetiva onda sonora, também designada por onda harmónica ou sinusoidal. Um exemplo de um som puro é o produzido pelo diapasão<sup>47</sup> que vibra com uma frequência de 440 Hz por segundo (correspondente à nota musical Lá).

Considere-se uma onda sonora pura definida por  $f(x) = A \text{sen}(wt)$  sendo  $A$  a amplitude e  $w$  a frequência.

Tem-se que a **amplitude** da função, medida em decibéis, indica **intensidade** com que o som é ouvido. Quanto maior a intensidade da onda sonora, maior será a amplitude da função que a representa. Ou seja, um som é fraco se a amplitude é baixa e um som é forte se a amplitude é alta. A título de exemplo, consideremos a representação gráfica de duas ondas sonoras definidas por  $f(x) = \text{sen } x$  e  $g(x) = 4 \text{sen } x$  (cf. Figura V.1).

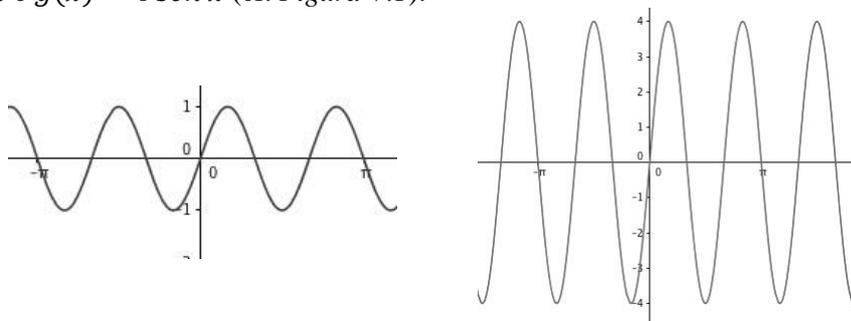


Figura V.1 – Representação gráfica de duas ondas sonoras com amplitudes distintas

A amplitude da primeira função é menor que a da segunda função pelo que o som correspondente à função  $f$  é menos intenso do que o representado pela função  $g$ . Se a função  $f$  corresponder a uma determinada nota musical, a função  $g$  representa a mesma nota musical com o quádruplo da intensidade.

A **frequência** da função, medida em Hertz (Hz), indica a **altura** do som, permitindo identificar a nota musical que lhe está associada. As notas musicais são caracterizadas pelas suas frequências (alturas): um som é grave se a sua frequência é baixa e um som é agudo se a respetiva frequência é alta. A título de exemplo, observe-se a figura seguinte (cf. Figura V.2), onde se encontram

<sup>47</sup> **Diapasão** é um instrumento metálico em forma de forquilha, que serve para afinar instrumentos e vozes através da vibração de um som puro, com frequência bem definida, correspondente a uma determinada nota musical.

representadas graficamente duas ondas sonoras, a primeira com menor frequência (menor número de oscilações por unidade de tempo) e, por isso, mais grave e a segunda mais aguda com maior frequência.

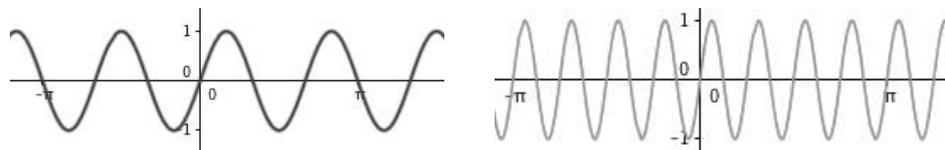


Figura V.2 – Representação gráfica de duas ondas sonoras com frequências distintas

Uma outra característica particular do som é o **timbre**. Esta característica permite identificar a fonte sonora, ou seja, distinguir uma mesma nota quando emitida por instrumentos diferentes. O timbre de um dado instrumento é definido pela representação gráfica do som por ele produzido. Na figura seguinte, apresentamos a representação gráfica do mesmo som emitido por diferentes fontes sonoras (cf. *Figura V.3*). Na primeira imagem encontra-se a representação gráfica do som produzido por um diapasão, nas restantes o som produzido por três instrumentos musicais distintos.

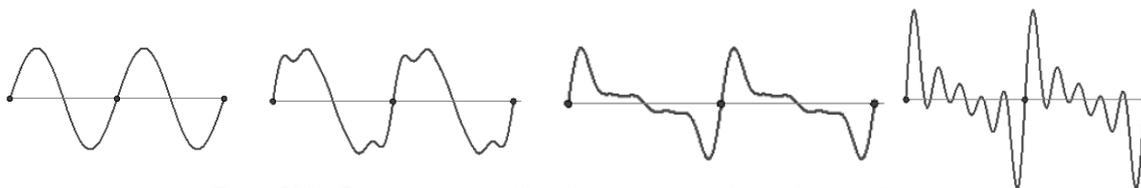


Figura V.3 – Representação gráfica de um som emitido por distintas fontes sonoras

No primeiro caso, observa-se uma onda sinusoidal, tal como seria esperado, dado que o som emitido por um diapasão é puro. No entanto, nos restantes, surpreendentemente, observam-se ondas periódicas mas não sinusoidais, todas distintas entre si.

**Mas porque razão o mesmo som emitido por diferentes instrumentos resulta em ondas sonoras distintas?**

A maioria dos sons produzidos por instrumentos musicais não são puros, são **sons complexos**. Ou seja, resultam da combinação de múltiplos sons puros com diferentes frequências, não perceptíveis isoladamente. A combinação de todas essas frequências constitui o timbre que caracteriza o instrumento musical.

A título de exemplo, consideremos a corda de um violão. Quando tocamos na corda, ela começa por vibrar em todo o seu comprimento e, seguidamente, efetua uma série de vibrações não na corda inteira, mas na sua metade, na sua terça parte e assim por diante, como ilustrado na figura (cf. *Figura V.4*). Tem-se que a frequência da segunda corda é o dobro da primeira corda, a frequência da terceira corda é o triplo da primeira corda, e assim sucessivamente.

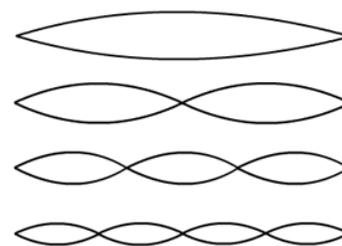


Figura V.4 – Vibração de uma corda

A frequência de cada corda é designada por **harmónica** e o conjunto de todas as frequências denominado de **série harmónica**. A frequência mais baixa (da primeira corda), designada por **fundamental**, é considerada a frequência da nota musical. As frequências mais altas, designadas por **harmónicas**, produzidas por vibrações secundárias desse corpo, são múltiplos inteiros da frequência fundamental.

Designando por  $f_i, i \in \mathbb{N}$ , a frequência de cada corda tem-se que a série harmónica obedece ao seguinte padrão:  $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$ , tendo o segundo harmónico uma frequência duas vezes maior que o fundamental, o terceiro harmónico três vezes maior que o fundamental e assim sucessivamente.

Tem-se, assim, que cada onda sonora é uma combinação de frequências que pode ser decomposta na sua frequência fundamental e nas respectivas frequências harmónicas.

Sabe-se que o modelo matemático que traduz uma onda pura é  $f(x) = A \operatorname{sen}(wt)$ . Como  $T = \frac{1}{f}$  e  $w = \frac{2\pi}{T}$  então  $w = 2\pi f$ . Logo para cada vibração tem-se  $w_i = 2\pi f_i$  e, conseqüentemente,  $f_i(x) = A_i \operatorname{sen}(w_i t)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Assim sendo, para obter, graficamente, o timbre de um dado instrumento adicionam-se as funções sinusoidais correspondentes aos sons puros, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots = A_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(w_2 t) + A_3 \operatorname{sen}(w_3 t) + \dots \\ &= A_1 \operatorname{sen}(2\pi f_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(2\pi f_2 t) + A_3 \operatorname{sen}(2\pi f_3 t) + \dots \\ &= A_1 \operatorname{sen}(2\pi f_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(4\pi f_1 t) + A_3 \operatorname{sen}(6\pi f_1 t) + \dots \end{aligned}$$

Desta forma, o som pode ser traduzido matematicamente como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente. Observe-se que a amplitude das vibrações é cada vez menor, pelo que os sons harmónicos são cada vez menos intensos.

Aquilo que confere características particulares ao som de um instrumento musical ou de uma voz humana é o número de harmónicos (som puro cuja frequência seja um múltiplo inteiro de uma dada frequência) que intervêm e a proporção com que cada um contribui para o som resultante. O facto dos harmónicos soarem com intensidades diferentes quando emitidos por instrumentos diferentes, constitui, desta forma, um fator preponderante na identificação da fonte que emitiu o som, ou seja, na distinção de uma nota tocada em instrumentos diferentes.

**V.2** As curvas definidas por osciladores com **amplitudes diferentes, ou seja,  $w_1 \neq w_2$** , são bastante complexas e encontram-se fora do âmbito deste trabalho. No entanto, a título de exemplo, apresentamos um caso particular.

Considere-se que  $w_2 = 2w_1$ ,  $\varphi_1 = 0$  e  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Tem-se que  $x(t) = a \operatorname{sen}(w_1 t)$  e  $y(t) = b \operatorname{sen}\left(2w_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Mas  $y(t) = b \operatorname{sen}\left(2w_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = b \operatorname{cos}(2w_1 t)$ .

Pela fórmula da duplicação do cosseno, tem-se  $\operatorname{cos}(2w_1 t) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(w_1 t)$ .

Logo  $y(t) = b \operatorname{sen}\left(2w_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = b(1 - 2 \operatorname{sen}^2(w_1 t)) = b - 2b \operatorname{sen}^2(w_1 t)$ .

Tem-se que  $\frac{x(t)}{a} = \operatorname{sen}(w_1 t)$  e  $\frac{b-y(t)}{2b} = \operatorname{sen}^2(w_1 t)$ .

Pelo que se obtém  $\frac{x^2(t)}{a^2} = \frac{b-y(t)}{2b} \Leftrightarrow y(t) = b\left(1 - 2\left(\frac{x(t)}{a}\right)^2\right)$  o que corresponde à equação de uma parábola. Conclui-se que, neste caso particular, o ponto P descreve um movimento parabólico, *para a frente e para trás*, à medida que o tempo decorre.

**Observação.** Observe-se que em todos os exemplos apresentados o gráfico obtido é uma linha fechada, ou seja, o ponto que a descreve volta ao ponto de partida e repete-a periodicamente. Esta situação só se verifica, caso  $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ , ou seja, o movimento só é periódico caso  $\frac{b}{a}$  seja racional, caso seja irracional o movimento é não periódico (cf. *Capítulo IV*).

## ANEXO VI

### Estórias que a história nos conta

#### VI.1 ARISTARCO... No mundo da lua

Considerado por muitos um dos maiores astrónomos de todos os tempos, Aristarco de Samos<sup>48</sup>, foi o primeiro a propor que a Terra gira em torno do Sol (teoria heliocêntrica) e que a terra possui um movimento de rotação. No decorrer dos estudos efetuados realizou diversos cálculos geométricos com o intuito de determinar as distâncias relativas entre os astros: o Sol, a Terra e a Lua. Na sua obra *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua* apresentou o que parece ser o primeiro exemplo de resolução de um triângulo retângulo: o cálculo entre a razão da distância da Terra ao Sol e a distância da Terra à Lua.

Apresentamos, de seguida, o modo como este brilhante astrónomo grego determinou a razão entre as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

- Considere-se que, no quarto crescente (ou no quarto minguante), a direção Terra-Lua (TL) com a direção Lua-Sol (LS) fazem entre si um ângulo reto.
- Considerem-se os pontos S, L e T o centro do Sol, da Lua e a posição do observador na superfície da Terra, respetivamente. Tem-se que o triângulo [TLS] é retângulo em L. Sejam  $\theta = \widehat{LTS}$  e  $\beta = \widehat{LSL}$  (cf. *Figura VI.1*)
- Aristarco estimou que a amplitude de  $\theta$  é  $87^\circ$ , pelo que  $\beta = 3^\circ$ .
- Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(87^\circ) &= \frac{\overline{LS}}{\overline{TS}} \Leftrightarrow \overline{TS} = \frac{\overline{LS}}{\operatorname{sen} 87^\circ} \\ \operatorname{cos}(87^\circ) &= \frac{\overline{TL}}{\overline{TS}} \Leftrightarrow \overline{TS} = \frac{\overline{TL}}{\operatorname{cos}(87^\circ)} \Leftrightarrow \overline{TS} = \frac{\overline{TL}}{\operatorname{sen}(3^\circ)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\overline{LS}}{\operatorname{sen} 87^\circ} = \frac{\overline{TL}}{\operatorname{sen} 3^\circ} \Leftrightarrow \frac{\overline{LS}}{\overline{TL}} = \frac{\operatorname{sen} 87^\circ}{\operatorname{sen} 3^\circ} \Leftrightarrow \frac{\overline{LS}}{\overline{TL}} \cong 19,08$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{TS}^2 = \overline{TL}^2 + \overline{LS}^2 = \overline{TL}^2 + (19 \overline{TL})^2 = 362 \overline{TL}^2 \Leftrightarrow \overline{TS} \cong 19 \overline{TL}.$$

- Concluiu, assim, que a distância da Terra ao Sol é cerca de 19 vezes maior do que a distância da Terra à Lua.

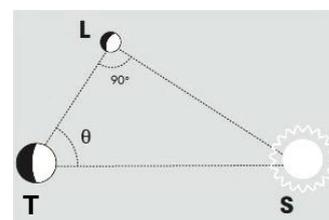


Figura VI.1 – Esquema relativo à posição da Terra, do Sol e da Lua no quarto crescente

**OBSERVAÇÃO.** Embora raciocínio de Aristarco esteja absolutamente correto, hoje sabe-se que a distância da Terra ao Sol é, aproximadamente, 400 vezes a distância da Terra à Lua. O principal erro cometido por Aristarco foi o da separação angular entre a Lua e o Sol; na verdade, quando a Lua tem exatamente metade da sua superfície visível, a separação angular não é de  $87^\circ$ , mas sim de  $89,95^\circ$ . Os erros cometidos deveram-se à falta de precisão dos instrumentos de medida disponíveis na época.

<sup>48</sup> **Aristarco de Samos** (310 a.C. – 230 a.C) matemático e astrónomo grego, foi o primeiro a afirmar que a Terra gira em torno do Sol. Embora esta teoria não tenha tido grande repercussão nos meios científicos, valeu-lhe o título de Copérnico da antiguidade.

## VI.2 ERATÓSTENES... Com os pés na terra

Segundo alguns autores, o primeiro cálculo da circunferência da terra foi realizado por Eratóstenes de Cirene<sup>49</sup>. Conta a história que Eratóstenes, um bibliotecário da famosa Biblioteca de Alexandria, encontrou, num velho papiro, indicações de que ao meio-dia de cada 21 de junho na cidade de Siena (atual Assuã) uma vareta colocada verticalmente no solo não produzia qualquer sombra, o que significava que, nesse momento, os raios solares incidiam, perpendicularmente ao solo. Cultura inútil, diriam alguns. Não para um homem observador como Eratóstenes, que verificou que à mesma hora, a inclinação dos raios solares em Alexandria, situada a 792 km (5000 *estádios*) a norte de Siena, era aproximadamente de 7,2°.

Vejamos os procedimentos adotados por Eratóstenes para determinar o **perímetro da terra**:

- Imagine-se duas varetas colocadas na vertical, uma em cada cidade.
- Imagine-se que as duas varetas se prolongam de tal forma que se intersectam no centro da Terra (cf. *Figura VI.2*). Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelas semirretas.
- Considere-se que os raios de Sol chegam à Terra praticamente paralelos entre si, devido à grande distância a que se encontra o Sol do nosso planeta (cf. *Figura VI.3*).
- Considerem-se os pontos A e B correspondentes às cidades de Alexandria e Siena, respectivamente, e O o centro da Terra.

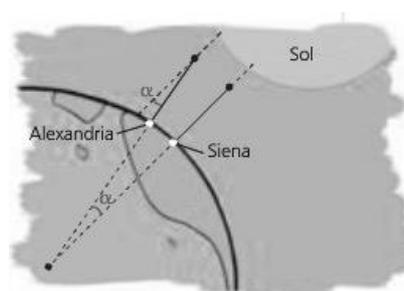


Figura VI.2 – Esquema que ilustra o método de Eratóstenes

Observa-se que os ângulos DAS e DOB têm a mesma amplitude, 7,2°, ou seja, 1/50 de uma circunferência.

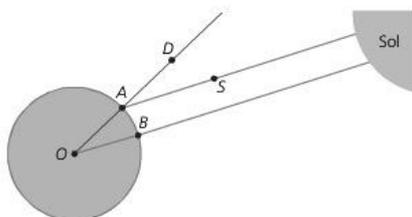


Figura VI.3 – Raios de Sol paralelos entre si

- O arco de circunferência AB (correspondente à distância entre Siena e Alexandria) corresponde a um ângulo ao centro igual a 1/50 de uma circunferência, pelo que o perímetro da Terra será de 50 vezes a distância entre as duas cidades.
- Como a distância entre Siena e Alexandria é de, aproximadamente, 792 km, tem-se
 
$$\frac{P_{Terra}}{792} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} \Leftrightarrow P_{Terra} = \frac{360^\circ \times 792}{7,2^\circ} = 39\,600 \text{ km.}$$
- Como  $P_{Terra} = 39\,600 \text{ km}$  então  $r_{Terra} \cong 6302,5 \text{ km}$ .

**OBSERVAÇÃO.** A estimativa de Eratóstenes de 6302,5 km é notável face ao valor atualmente conhecido, 6378 km, tendo em conta o caráter rudimentar das medições efetuadas.

<sup>49</sup> **Eratóstenes de Cirene** (276 a.C. – 194 a.C.) matemático, geógrafo, astrónomo grego que se notabilizou por ter sido o primeiro a determinar o perímetro de um meridiano terrestre.

### VI.3 HIPARCO... A lua, o sol e a terra

Um dos matemáticos e astrónomos mais importantes na história do desenvolvimento da trigonometria é Hiparco de Niceia<sup>50</sup>. Destacou-se pelo rigor das suas observações e pelas conclusões a que chegou a partir do eclipse solar e do eclipse lunar, descobertas fundamentais para a astronomia. Começamos por analisar o modo como este astrónomo grego, observando um eclipse total do Sol, determinou o **tamanho da Lua relativamente ao Sol**.

- Considere-se, de acordo com a figura ao lado (cf. *Figura VI.4*)
  - $R_L$  a medida do comprimento do raio da Lua
  - $R_S$  a medida do comprimento do raio do Sol
  - $\overline{TL}$  a distância da Terra à Lua
  - $\overline{TS}$  a distância da Terra ao Sol

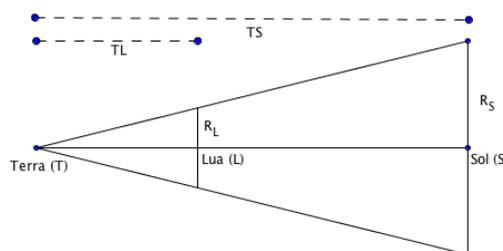


Figura VI.4 – Esquema do eclipse total do Sol

Todas as distâncias são medidas a partir do centro da Terra T, da Lua L e do Sol S.

- Considere-se que no eclipse total do Sol a Lua e o Sol têm o mesmo diâmetro angular, ou seja, o ângulo segundo o qual um observador na Terra vê a Lua é igual ao ângulo com que vê o sol.
- Pela semelhança de triângulos retângulos, tem-se

$$\frac{R_L}{\overline{TL}} = \frac{R_S}{\overline{TS}} \Leftrightarrow \frac{R_S}{R_L} = \frac{\overline{TS}}{\overline{TL}}$$

- De acordo com a descoberta de Aristarco (cf. *Anexo VI.1*),  $\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}} \cong 19$ , logo  $\frac{R_S}{R_L} \cong 19$ .

Conclui-se, assim, que o raio do Sol é cerca de 19 vezes maior do que o raio da Lua.

Uns anos mais tarde, o mesmo Hiparco, observando o eclipses lunar, determinou a **distância da Terra à Lua**. Tendo por base a figura seguinte (cf. *Figura VI.5*), apresentamos os procedimentos de Hiparco.

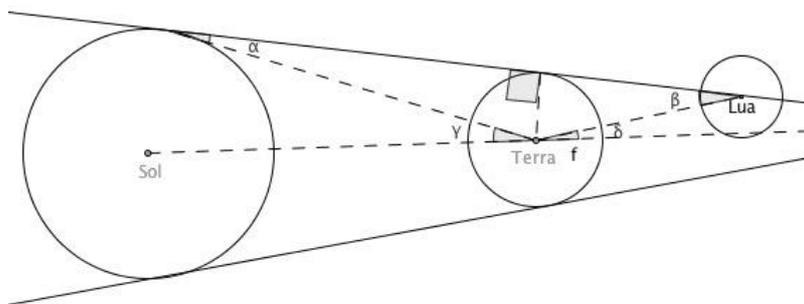


Figura VI.5 – Esquema do eclipse lunar

- Considere-se que o período orbital da Lua (tempo que a Lua demora a percorrer uma volta completa em torno da Terra) é de aproximadamente 27,3 dias e que um eclipse lunar demora cerca de 100 minutos.

Tem-se que  $27,3 \text{ dias} = 27,3 \times 24 \times 60 \text{ minutos} = 39312 \text{ minutos}$ , logo

$$\frac{39312 \text{ min}}{360^\circ} = \frac{100 \text{ min}}{2\delta} \Leftrightarrow \delta = \frac{360^\circ \times 100}{2 \times 39312 \text{ min}} \cong 0,5^\circ.$$

- A medida do ângulo  $\gamma$  foi obtida através do astrolábio<sup>51</sup>,  $\gamma = 0,25^\circ$ .

<sup>50</sup> **Hiparco de Niceia** (180 a.C. – 125 a.C.) matemático e astrónomo grego, considerado o pai da trigonometria. Elaborou um tratado composto por 12 livros onde consta o que se acredita ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas, e a introdução de medidas sexagesimais em astronomia.

<sup>51</sup> **Astrolábio** é um instrumento naval, usado para medir a altura dos astros acima do horizonte.

- Tem-se que  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ . A medida de  $\alpha$  por ser muito pequena quando comparada com as restantes foi desprezada, pelo que se concluiu que  $\beta = \gamma + \delta$ . Donde  $\beta = 0,25^\circ + 0,5^\circ = 0,75^\circ$ .

- Como  $\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do comprimento do raio da terra } (R_T)}{\text{distância da Terra à Lua } (\overline{TL})}$  e  $R_T \cong 6302 \text{ km}$  (cf. Anexo VI.2) então

$$\text{sen } 0,75 = \frac{6302}{\overline{TL}} \Leftrightarrow \overline{TL} = \frac{6302}{\text{sen } 0,75} \cong 481851 \text{ km.}$$

Conclui-se que a distância da Terra à Lua é aproximadamente 481851 km.

#### VI.4 REGIOMONTANUS... Um problema histórico

Se inicialmente a trigonometria surge enraizada nas origens astronómicas e é, sobretudo, desenvolvida pelos trabalhos dos matemáticos gregos, indianos e árabes, a partir do séc. XV, os estudos trigonométricos surgem para resolver problemas físicos ao nosso redor, em particular, problemas cartográficos (cálculos de latitudes e longitudes) e topográficos.

De entre os muitos matemáticos responsáveis por este impulso no desenvolvimento da trigonometria, destaca-se Johannes Müller von Königsberg, conhecido como Regiomontanus<sup>52</sup>, o qual estabeleceu, pela primeira vez, a Trigonometria como um ramo da Matemática. Regiomontanus, um dos matemáticos mais influentes do séc. XV, escreveu a importante obra *De triangulis omnimodis libri quinque* (traduzido *Triângulos de todos os tipos*) que descreve pormenorizadamente a trigonometria plana e esférica desenvolvida até à data por gregos, indianos e árabes. Na sua obra, constituída por cinco livros, sendo os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os restantes à trigonometria esférica, apresenta alguns teoremas originais, como por exemplo, a fórmula trigonométrica da área do triângulo (cf. *Secção 1.5*), a Lei dos senos aplicada à resolução de triângulos obtusângulos e a Lei dos cossenos aplicada à trigonometria esférica. Apresenta, ainda, novas tabelas trigonométricas que incluem, pela primeira vez, a tangente de um ângulo.

Para além da importante obra publicada, Regiomontanus é conhecido por ter proposto um intrigante problema de otimização, provavelmente, inspirado nas noções de perspetiva que ocupavam os artistas renascentistas daquele período de tempo. O desafio foi lançado em 1471, a Christian Roder, um professor da Universidade de Erfurt. O enunciado do famoso problema de extremos<sup>53</sup> é o seguinte:

“*Considere-se uma vara suspensa perpendicularmente em relação ao chão. De que ponto do solo o ângulo de visão da vara é máximo?*” (cf. Figura VI.6)

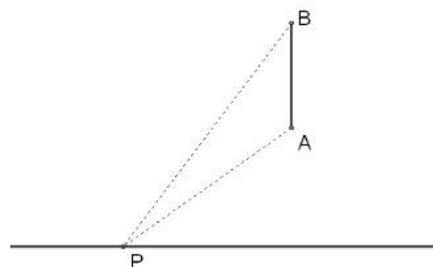


Figura VI.6 - Representação geométrica do problema de Regiomontanus

<sup>52</sup> **Johannes Muller Von Königsberg** (1436-1476), conhecido por Regiomontanus (tradução latina do seu apelido alemão), astrónomo e matemático que marcou a história da trigonometria do séc. XV. Realizou diversos estudos nas áreas da astronomia, geometria e trigonometria. A sua principal obra *De triangulis omnimodis libri quinque* apresenta uma visão moderna da trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas.

<sup>53</sup> **Problema de extremos** é um problema em que se pretende maximizar ou minimizar uma medida (de comprimento de um segmento, de amplitude de um ângulo, um perímetro, uma área ou uma relação entre duas medidas).

O problema de Regiomontanus pode ser resolvido recorrendo à álgebra, à geometria analítica e ao cálculo diferencial. Tendo em atenção a temática deste trabalho, apresentamos uma resolução trigonométrica, recorrendo à identidade relativa à tangente da adição de dois ângulos.

Seja [AB] a vara vertical suspensa perpendicularmente em relação ao solo e P o ponto do solo onde  $\theta = \widehat{BPA}$  é máximo (cf. *Figura VI.7*).

Observe-se que à medida que o ponto P se afasta do ponto O, o ângulo de visão torna-se mais pequeno. Se o ponto P se for aproximando do ponto O, o ângulo de visão aumenta progressivamente, no entanto, e a partir de um determinado momento diminui novamente até se tornar zero (quando os pontos P e O coincidem).

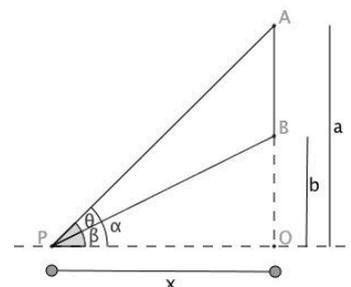


Figura VI.7 – Esquema do problema de Regiomontanus

Considere-se  $a = \overline{OA}$ ,  $b = \overline{OB}$ ,  $x = \overline{OP}$ ,  $\alpha = \widehat{OPA}$  e  $\beta = \widehat{OPB}$ . Observe-se que  $\theta = \alpha - \beta$ .

Tendo em conta que a medida de amplitude de um ângulo é máxima quando o valor da sua tangente é máximo, comecemos por determinar a respetiva tangente.

Recorrendo à fórmula tangente da diferença de dois ângulos, vem

$$tg(\theta) = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{ax - bx}{x^2 + ab} = \frac{a - b}{x + \frac{ab}{x}}$$

Como o numerador  $a - b$  é constante então o valor de  $tg(\theta)$  é máximo quando o denominador  $x + \frac{ab}{x}$  for mínimo.

Sabe-se que a média aritmética de dois números positivos  $u$  e  $v$  é maior ou igual à média geométrica dos respetivos números e que as duas médias são iguais se e só se os dois números forem iguais, ou seja,

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{u \cdot v} \quad \text{e} \quad \frac{u+v}{2} = \sqrt{u \cdot v} \Leftrightarrow u = v.$$

Considerando  $u = x$  e  $v = \frac{ab}{x}$  tem-se

$$x + \frac{ab}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = 2\sqrt{ab}.$$

A igualdade entre as duas médias acontece quando os dois números são iguais pelo que

$$x + \frac{ab}{x} = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x^2 = ab \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{ab}.$$

Como  $x > 0$  então  $x = \sqrt{ab}$ .

Donde se conclui que o ponto do solo que corresponde ao ângulo máximo de visão está a uma distância  $\sqrt{ab}$  de O.

## VI.5 PTOLOMEU... Entre cordas e arcos

Como vimos no capítulo 3, alguns dos principais contributos para a Trigonometria resultantes de estudos astronómicos têm origem babilónica e encontram-se registados em inúmeras tábuas, nomeadamente, a *Tabela Plimpton 322* (cf. *Encanto 3*). Ao longo da história, astrónomos e matemáticos determinaram valores para as razões trigonométricas de um ângulo agudo por processos experimentais que não eram rigorosos nem rápidos. Em muitos casos, calcularam valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos, de grau a grau ou até de minuto a minuto e, assim, construíram tabelas ou tábuas trigonométricas que, durante muito tempo, foram de grande utilidade.

As primeiras tabelas de cordas surgem no século III a.C com Hiparco de Nicéia e Cláudio Ptolomeu. Consta que Hiparco, que viveu em Alexandria cerca de 150 d.C., para efetuar o cálculo da distância Terra-Lua recorreu a tabelas de cordas de origem babilônica. Não satisfeito com o trabalho dos seus antecessores, construiu uma tabela de cordas com uma precisão admirável, recorrendo apenas a conhecimentos de geometria. É possível encontrar uma obra composta por doze livros sobre o cálculo do comprimento de cordas na qual incluiu a primeira tabela trigonométrica, que infelizmente não chegou aos nossos dias. Embora haja poucos registros da sua obra, acredita-se que os seus inúmeros trabalhos serviram, anos mais tarde, de inspiração ao trabalho desenvolvido pelo grande astrônomo Ptolomeu que elaborou uma obra que se tornou um marco no estudo da Astronomia, o *Almagesto*<sup>54</sup>, e na qual surge a primeira tabela de cordas (mais completa do que a apresentada por Hiparco).

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
παραρτηρῶν	εὐθειῶν	ἑξήκοστων	arcus	chordis	sixtieths
ζ'	σα κα	σα β γ	1°	0;31,25	0;1,2,50
αζ'	α β γ	σα β γ	1'	1; 2,50	0;1,2,50
βζ'	α β ε	σα β γ	1 1/2'	1;34,15	0;1,2,50
βζ'	β ε μ	σα β γ	2'	2; 5,40	0;1,2,50
γζ'	γ η δ	σα β γ	2 1/2'	2;37,4	0;1,2,48
γζ'	γ η κ	σα β γ	3'	3; 8,28	0;1,2,48
δζ'	δ ι λ	σα β γ	3 1/2'	4;11,16	0;1,2,47
δζ'	δ ι μ	σα β γ	4'	4;42,40	0;1,2,47
εζ'	ε ι σ	σα β γ	5'	5;14,4	0;1,2,46
εζ'	ε ι κ	σα β γ	5 1/2'	5;45,27	0;1,2,45
ςζ'	ς ι μ θ	σα β γ	6'	6;16,49	0;1,2,44
ςζ'	ς ι λ κ	σα β γ	6 1/2'	6;48,11	0;1,2,43
ζζ'	ζ ι λ γ	σα β γ	7'	7;19,33	0;1,2,42
ζζ'	ζ ι ν δ	σα β γ	7 1/2'	7;50,54	0;1,2,41
...	...	...	...	...	...
ρδζ'	ρδ β κ μ γ	σα β γ	174 1/2'	119;51,43	0;0,2,53
ρδζ'	ρδ β η ι	σα β γ	175'	119;53,10	0;0,2,56
ρδζ'	ρδ β θ κ	σα β γ	175 1/2'	119;54,27	0;0,2,20
ρδζ'	ρδ β λ μ	σα β γ	176'	119;55,38	0;0,2,3
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	176 1/2'	119;56,39	0;0,1,47
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	177'	119;57,32	0;0,1,30
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	177 1/2'	119;58,18	0;0,1,14
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	178'	119;58,55	0;0,0,57
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	178 1/2'	119;59,24	0;0,0,41
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	179'	119;59,44	0;0,0,25
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	179 1/2'	119;59,56	0;0,0,9
ρδζ'	ρδ β ν κ λ θ	σα β γ	180'	120;0,0	0;0,0,0

Figura VI.8 – Tabela Trigonométrica (retirada de *Trigonometric Delights* [8])

Recorrendo apenas a geometria euclidiana, Ptolomeu determinou a medida das cordas dos ângulos ao centro de uma dada circunferência de 1/2° a 180°, em intervalos de meio grau.

Na figura está representada parte da tabela de cordas de Ptolomeu, sendo que as três primeiras colunas estão escritas em grego e as restantes em inglês (cf. *Figura VI.8*). A tabela é constituída por três colunas: a primeira, corresponde à amplitude dos arcos; a segunda, ao comprimento da corda correspondente ao arco; e a terceira, ao valor da corda correspondente a um arco de corda já conhecido acrescido de um minuto de grau. Esta coluna era usada para interpolações, ou seja, para determinar o valor de  $crd \alpha$  quando  $\alpha$  está compreendido entre duas entradas na coluna de arcos .

Sendo, a tabela de cordas de Ptolomeu, de entre todas as tabelas trigonométricas da Antiguidade, a mais famosa, vejamos quais os procedimentos adotados na sua construção:

- A construção da tabela de cordas teve por base a relação entre o comprimento da corda de um arco de circunferência,  $crd \alpha$ , e a medida do ângulo ao centro correspondente,  $\alpha$  (cf. *Figura VI.9*).
- Ptolomeu começou por fixar um sistema de medida, para tal dividiu a circunferência em 360 partes, hoje designadas de graus, dividiu o diâmetro em 120 partes, cada uma dessas partes do diâmetro dividiu em 60 porções, designados por minutos, e essas por sua vez dividiu em mais 60 partes, designadas por segundos. Definiu a função corda do arco  $\alpha$  como o comprimento da corda que corresponde a um arco de  $\alpha$  graus num círculo cujo raio é 60.
- De seguida, utilizando uma circunferência de raio 60 e alguma geometria elementar, determinou o comprimento de cordas de ângulos com amplitudes *especiais*, isto é, cordas correspondentes aos lados de polígonos regulares inscritos numa circunferência, por exemplo,  $crd (36^\circ)$  correspondente ao lado de um decágono,  $crd (60^\circ)$  correspondente ao lado de um

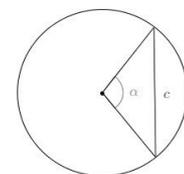


Figura VI.9 – Círculo

<sup>54</sup> *Almagesto* ou *Syntaxis Mathematica* é a principal obra elaborada por Ptolomeu e consiste num tratado de treze livros sobre astronomia onde descreve pormenorizadamente o movimento e posição dos astros, apresentando e desenvolvendo argumentos a favor da teoria geocêntrica do universo. No primeiro livro introduz conceitos matemáticos indispensáveis para a compreensão dos fenómenos celestes e os restantes são dedicados à astronomia.

hexágono,  $crd(72^\circ)$  correspondente ao lado de um pentágono,  $crd(90^\circ)$  correspondente ao lado de um quadrado e  $crd(120^\circ)$  correspondente ao lado de um triângulo equilátero.

A tabela seguinte ilustra os resultados obtidos por Ptolomeu:

Tabela VI.1 – Relação entre a medida entre o comprimento da corda de um arco de circunferência,  $crd \alpha$ , e a medida do ângulo ao centro correspondente,  $\alpha$ .

Ângulo $\alpha$	$crd(\alpha)$
$90^\circ$	$\sqrt{2}r$
$60^\circ$	$r$
$120^\circ$	$\sqrt{3}r$
$36^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$
$72^\circ$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}r$

- Dado que qualquer triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo (cf. *Figura VI.10*), aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se

$$crd(\alpha) = \sqrt{(2r)^2 - crd^2(180^\circ - \alpha)}.$$

- Recorrendo a esta identidade e tendo por base o comprimento das cordas previamente determinadas, Ptolomeu calculou o comprimento de cordas de outros ângulos, como por exemplo,  $144^\circ$ .

Tem-se que

$$\begin{aligned} crd(144^\circ) &= \sqrt{(2r)^2 - crd^2(36^\circ)} = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2} = \sqrt{\frac{16r^2 - 6r^2 + 2\sqrt{5}r^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{10r^2 + 2\sqrt{5}r^2}{4}} = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

- Para determinar os restantes ângulos, Ptolomeu recorreu a um teorema que recebeu o seu próprio nome, Teorema de Ptolomeu (cf. *Encanto 2*), e a partir deste deduziu as fórmulas da diferença e da soma de duas cordas

$$2r \operatorname{crd}(\alpha - \beta) = \operatorname{crd}(\alpha) \operatorname{crd}(180^\circ - \beta) - \operatorname{crd}(\beta) \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$$

$$2r \operatorname{crd}(\alpha + \beta) = \operatorname{crd}(\beta) \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{crd}(\alpha) \operatorname{crd}(180^\circ - \beta)$$

e a fórmula da metade de uma corda,

$$\operatorname{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r \operatorname{crd}(180^\circ - 2\alpha)}$$

Estas identidades permitiram determinar as cordas relativas a outros ângulos, como por exemplo,

$$\operatorname{crd}(12^\circ) = \operatorname{crd}(72^\circ - 60^\circ).$$

Aplicando sucessivamente a fórmula da corda da metade de um ângulo a  $12^\circ$  obteve as cordas  $\operatorname{crd}(6^\circ)$ ,  $\operatorname{crd}(3^\circ)$ ,  $\operatorname{crd}\left(\frac{3^\circ}{2}\right)$  e  $\operatorname{crd}\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$ . Consegue desta forma encontrar os

comprimentos de cordas dos ângulos  $\frac{3^\circ}{2^n}$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Ficava-lhe a faltar  $\operatorname{crd}(1^\circ)$ .

- Para obter  $\operatorname{crd}(1^\circ)$ , Ptolomeu recorreu a um processo de interpolação/enquadramento recorrendo a uma relação já conhecida pelos matemáticos gregos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} \text{ para } \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

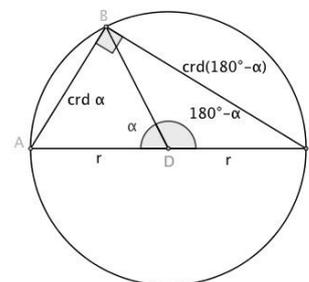


Figura VI.10 – Relação entre as cordas de  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$

Tem-se que  $\frac{crd\left(\frac{3^\circ}{2}\right)}{crd\left(1^\circ\right)} < \frac{3}{2}$  e  $\frac{crd\left(1^\circ\right)}{crd\left(\frac{3^\circ}{4}\right)} < \frac{4}{3}$ . Logo  $\frac{2}{3} crd\left(\frac{3^\circ}{2}\right) < crd\left(1^\circ\right) < \frac{4}{3} crd\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$ .

Recorrendo a resultados anteriores, Ptolomeu determinou uma aproximação de  $\frac{4}{3} crd\left(\frac{3^\circ}{4}\right)$  com 7 casas decimais, 0,0174537 e constatou que uma aproximação de  $\frac{2}{3} crd\left(\frac{3^\circ}{2}\right)$  era também 0,0174537. Obteve assim para  $crd\left(1^\circ\right)$  a aproximação de 0,0174537.

Durante vários séculos, os cálculos nas observações astronômicas dependeram das tabelas de cordas elaboradas por Ptolomeu, tendo o *Almagesto* representado a mais importante fonte de consulta de todo o mundo. Porém, por volta do séc. VIII, a astronomia indiana surge com novas perspectivas sobre a trigonometria num conjunto de textos denominados *Siddhanta*. Os astrónomos indianos substituem a relação entre a corda e o respetivo ângulo ao centro de Ptolomeu pela relação entre a metade de uma corda, designada por *jya* ou *jiva*, e a metade do ângulo ao centro correspondente. Desta forma ficavam habilitados a trabalhar com um triângulo retângulo (cf. *Figura VI.11*).

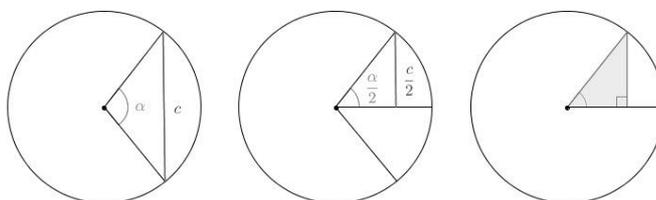


Figura VI.11 – Relação entre o comprimento da metade da corda de um arco de circunferência,  $crd\ \alpha$ , e a medida de metade ângulo ao centro correspondente,  $\alpha$ .

Na figura seguinte está representada uma semicorda hindu designada por *jya* ou *jiva* (cf. *Figura VI.12*)<sup>55</sup>. Tendo por base alguns resultados geométricos e trigonométricos, tem-se

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{crd\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r} = \frac{2crd\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2r} = \frac{crd\left(\alpha\right)}{2r}$$

pelo que facilmente se conclui que a tábua de cordas construída por Ptolomeu é equivalente a uma tábua de senos de  $1/4^\circ$  a  $90^\circ$ , de  $1/4$  em  $1/4$  de grau.

O conflito entre a trigonometria do *Almagesto* e a trigonometria hindu termina, anos mais tarde, quando o matemático árabe *Al-Battani* (850-929) adota a trigonometria hindu, introduzindo uma inovação preciosa para a matemática: a circunferência trigonométrica (cf. *Capítulo 2*).

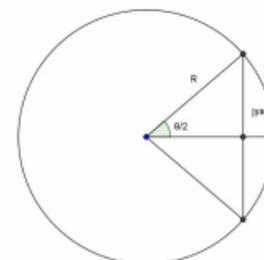


Figura VI.12 – Semicorda

<sup>55</sup> A palavra **seno** deriva do termo latim *sinus* e é a tradução latina da palavra árabe *jya* que significa a corda de um arco (de caça ou de guerra). A abreviatura *sen* foi usada pela primeira vez por Edmund Gunter (1581 - 1626).